

Universidade de Brasília – UnB
Campus Gama – FGA
Engenharia Aeroespacial

MÉTODOS PARA RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE
TOMOGRAFIA DA COROA SOLAR BASEADOS EM
Compressive Sensing

DANIELE DIAS

Orientador: Dr. CRISTIANO JACQUES MIOSSO
Co-orientador: Dr. GIANCARLO SANTILLI



UNB – UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FGA – FACULDADE GAMA

ENGENHARIA AEROESPACIAL

MÉTODOS PARA RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE TOMOGRAFIA
DA COROA SOLAR BASEADOS EM *Compressive Sensing*

DANIELE DIAS

ORIENTADOR: CRISTIANO JACQUES MIOSSO

CO-ORIENTADOR: GIANCARLO SANTILLI

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
ENGENHARIA AEROESPACIAL

BRASÍLIA/DF, DEZEMBRO DE 2019

UNB – UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FGA – FACULDADE GAMA
ENGENHARIA AEROESPACIAL

MÉTODOS PARA RECONSTRUÇÃO DE IMAGENS DE TOMOGRAFIA
DA COROA SOLAR BASEADOS EM *Compressive Sensing*

DANIELE DIAS

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO SUBMETIDO À FACULDADE UNB GAMA
DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE BACHAREL EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

APROVADA POR:

Cristiano Jacques Miosso

(Orientador)

Giancarlo Santilli

(Co-orientador)

Prof. Ronni Geraldo Gomes Amorim, PhD

Prof. Fabiano Araújo Soares, PhD

FICHA CATALOGRÁFICA

DIAS, DANIELE

Métodos para Reconstrução de Imagens de Tomografia da Coroa Solar Baseados em *Compressive Sensing*, [Distrito Federal], 2019.

62p., 210 × 297 mm (FGA/UnB Gama, Bacharelado em Engenharia Aeroespacial, 2019).

Trabalho de Conclusão de Curso, Faculdade UnB Gama, Engenharia Aeroespacial

- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| 1. Imageamento | 2. Tomografia Solar |
| 3. <i>Compressive Sensing</i> | 4. Processamento de Sinais |
| I. FGA UnB/UnB. | |

REFERÊNCIA

DIAS, DANIELE (2019). Métodos para Reconstrução de Imagens de Tomografia da Coroa Solar Baseados em *Compressive Sensing*. Trabalho de Conclusão de Curso, Engenharia Aeroespacial, Faculdade UnB Gama, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 62p.

SESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Daniele Dias

TÍTULO: Métodos para Reconstrução de Imagens de Tomografia da Coroa Solar Baseados em *Compressive Sensing*

GRAU: Bacharel em Engenharia Aeroespacial

ANO: 2019

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias desta monografia de conclusão de curso e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desta monografia pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

“Equipado com seus cinco sentidos, o homem explora o Universo ao seu redor e chama
essa aventura de ‘Ciência’.”

Edwin Powell Hubble

Dedico este trabalho a minha família e principalmente a minha avó paterna, que não se encontra mais entre nós, mas tenho certeza que ficaria muito feliz em saber que pude cursar engenharia.

AGRADECIMENTOS

Assim como Newton, *“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes”*, comigo não seria diferente. Gostaria de agradecer a cada pessoa que me ajudou a estar aqui, aos meus pais por me darem o suporte que nem eles tiveram, a cada professor que me acompanhou desde o início da minha vida escolar, até atualmente na faculdade, cada colega que tive, e que me incentivou a continuar, que esteve comigo em cada momento importante da minha vida, sem isso não poderia estar escrevendo isso hoje. Gostaria de dar um agradecimento especial ao meu professor de Química do ensino médio, Júlio César, pela ajuda incomensurável para meu ingresso na Universidade, ao meu amigo Fernando Alcy, por sempre estar ao meu lado e me incentivando, ao meu amigo e namorado Arthur Wernke, por estar comigo, mesmo nos piores momentos, aos professores Cristiano Jacques Miosso e Giancarlo Santilli, por me orientarem nesse trabalho, ao Elpídio Cândido por ter tornado este trabalho possível e a própria Universidade de Brasília. Não é possível agradecer especificamente cada pessoa que fez uma diferença na minha vida, mas mesmo assim, sou grata a todos os que fizeram.

Obrigada.

RESUMO

A coroa solar é um grande mistério no mundo acadêmico, devido a sua composição em relação à superfície solar. Para estudar o comportamento da atividade solar várias técnicas foram utilizadas, dentre elas, a tomografia da coroa solar, a qual se destacou devido à natureza das ondas de emissão dessa área da atmosfera solar.

Os métodos existentes na literatura para imageamento da coroa solar permitem imagens de qualidade limitada, em virtude dos números abaixo do critério de Shannon-Nyquist de projeções captadas pelos telescópios em posições relativas semelhantes com respeito ao sol.

Neste contexto, este trabalho propõe avaliar o desempenho de técnicas de reconstrução que têm levado à melhora da qualidade objetiva em imagens de tomografia em aplicações médicas, e explorar sua possibilidade na aplicação da análise da coroa solar. A nova aplicação exige uma adaptação da forma das medidas de entrada dos algoritmos, e o trabalho avalia o desempenho das reconstruções de imagens da coroa solar utilizando esta adaptação.

A metodologia utilizada se baseia no uso de *Compressive Sensing* com algoritmos de pré-filtragem, que estão entre as técnicas que resultam em melhor qualidade objetiva em problemas de imageamento médico. Para aplicação da pré-filtragem, no entanto, são exigidas medidas no domínio da frequência, enquanto que as medidas no caso de análise da coroa solar estão inicialmente no domínio de Radon. Portanto, o método proposto neste trabalho inicia com uma estimação de medidas no domínio de Fourier a partir das medidas de Radon. Considerando o uso subsequente em algoritmos de otimização, são calculadas as medidas aproximadas em uma malha cartesiana, que possibilitam o uso de transformadas rápidas de Fourier. Em seguida, são aplicadas as técnicas de pré-filtragem propriamente ditas, que consistem na reconstrução de versões filtradas da imagem desejada, com uso de filtros que permitam a esparsificação das imagens. Após reconstrução das imagens filtradas explorando essa esparsidade, usando *Compressive Sensing*, uma etapa de composição espectral permite a obtenção da imagem da coroa solar.

Os resultados obtidos apresentam uma melhora tanto na relação sinal-ruído (SNR) quanto no índice de similaridade estrutural (SSIM), quando comparados com o método tradicional de retroprojeção filtrada. De fato, com a retroprojeção filtrada a SNR da imagem reconstruída varia de 1.8 dB até 37.1 dB, quando o número de projeções de entrada varia de 50 a 500, enquanto que com o método proposto, a SNR varia de 44.0 dB até 57.0 dB, para os mesmos números de projeções. Além disso, mesmo com 1000 projeções a SNR obtida com retroprojeção filtrada (40.1 dB) fica abaixo da obtida com 500 projeções usando o método proposto (57.0 dB). Já no caso da segunda métrica de qualidade, observamos que com a retroprojeção filtrada o uso de 500 projeções resulta em uma SSIM de 0.16, enquanto que o método proposto resulta em uma SSIM de 0.56.

Estes resultados sugerem que *Compressive Sensing* com pré-filtragem permite uma melhora em relação à técnica de pré-filtragem para imageamento da coroa solar, analogamente à melhora observada nos últimos anos em problemas de imageamento médico. Na próxima etapa da pesquisa, será feita uma análise estatística destes resultados, com base em um número maior de imagens de teste.

ABSTRACT

Solar corona is a great mystery in the academic world due to its composition in relation to the solar surface. To study the behavior of solar activity several techniques were used, among them the tomography of the solar corona, which stood out due to the nature of the emission waves of this area of the solar atmosphere.

Existing methods for solar corona imaging in the literature allow for limited quality images due to the numbers below the Shannon-Nyquist criterion of projections captured by telescopes at similar relative positions with respect to the sun.

This work proposes to evaluate the performance of reconstruction techniques that have led to the improvement of objective quality in tomography images in medical applications, and to explore their possibility in the application of solar crown analysis. The new application requires an adaptation of the shape of the algorithm input measurements, and the work evaluates the performance of solar corona image reconstructions using this adaptation.

The methodology used is based on the use of Compressive Sensing with prefiltering algorithms, which are among the techniques that result in better objective quality in medical imaging problems. For pre-filtering application, however, frequency domain measurements are required, while measurements in the case of solar corona analysis are initially in the Radon domain. Therefore, the method proposed in this paper starts with an estimation of Fourier domain measurements from Radon measurements. Considering the subsequent use in optimization algorithms, the approximate measurements in a Cartesian mesh are calculated, which allow the use of fast Fourier transforms. Then, the proper prefiltration techniques are applied, which consists in the reconstruction of filtered versions of the desired image, using filters that allow the sparsification of the images. After reconstructing the filtered images by exploiting this sparsity, using Compressive Sensing, a spectral compositing step allows the image of the solar corona to be obtained.

The results show an improvement in both signal-to-noise ratio (SNR) and structural similarity index (SSIM) when compared to the traditional filtered rear projection method. In fact, with the SNR filtered rear projection of the reconstructed image ranges from 1.8 dB to 37.1 dB, when the number of input projections ranges from 50 to 500, while with the proposed method the SNR ranges from 44.0 dB to 57.0 dB, for the same projection numbers. Moreover, even with 1000 projections the SNR obtained with filtered back projection (40.1 dB) is below that obtained with 500 projections using the proposed method (57.0 dB). In the case of the second quality metric, we observed that with the

filtered rear projection, the use of 500 projections results in SSIM of 0.16, while the proposed method results in SSIM of 0.56.

These results suggest that Compressive Sensing with prefiltering allows an improvement over the prefiltering technique for solar corona imaging, similar to the improvement seen in recent years in medical imaging problems. In the next step of the research, a statistical analysis of these results will be made, based on a larger number of test images.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Contextualização	2
1.2	Definição do Problema Científico e Proposta de Pesquisa	5
1.3	Objetivos	5
1.3.1	Objetivo Geral	5
1.3.2	Objetivos Específicos	5
2	Fundamentação teórica e Estado da Arte	6
2.1	Transformadas integrais	6
2.1.1	Transformada de <i>Fourier</i>	6
2.1.2	Transformada de <i>wavelets</i>	8
2.1.3	Transformada de <i>Radon</i>	10
2.2	<i>Compressive Sensing</i>	13
2.2.1	Amostragem de sinais	14
2.2.2	Teorema de minimização	15
2.2.3	Esparsidade	16
2.2.4	Solução de otimização combinatorial	16
2.2.5	Propriedades das p-normas	17
2.2.6	Proposta de solução	19

2.3	Aplicações de Tomografia Computadorizada	20
2.3.1	História da tomografia	20
2.3.2	Princípios da tomografia computadorizada	22
2.3.3	Reconstrução de imagens tomográficas	25
2.4	Observação da Coroa Solar	27
2.4.1	Características e fenômenos coronais	27
2.4.2	Descrição física da irradiância solar	30
2.4.3	Missões de observação solar	32
2.4.4	Sistema de coordenadas para dados de imagens solares	35
2.4.5	Modelo de reconstrução da irradiância solar	36
3	Materiais e Métodos	38
3.1	Visão Geral	38
3.2	Estimação de medidas no domínio de Fourier a partir da Transformada de Radon	39
3.3	Procedimento de otimização para reconstrução	40
3.4	Pré-filtragem	41
3.5	Algoritmo	43
3.6	Imagem-teste	46
4	Resultados e Discussões	47
4.1	Algoritmo proposto	47
4.2	Comparação	51
5	Trabalhos futuros	54

LISTA DE TABELAS

2.1	Missões solares.	35
3.1	Algoritmo utilizado para a reconstrução das imagens a partir das medidas no domínio da frequência, com base nos métodos iterativo dos mínimos quadrados reponderados.	45
4.1	Análise de qualidade com base na relação sinal-ruído e na similaridade estrutural para a reconstrução da imagem com o algoritmo proposto. . .	50
4.2	Análise de qualidade com base na relação sinal-ruído e na similaridade estrutural entre a imagem reconstruída por retroprojeção filtrada e o caso ideal.	52
4.3	Análise de qualidade com base na relação sinal-ruído e similaridade estrutural utilizando a retroprojeção filtrada com 1000 projeções.	53

LISTA DE FIGURAS

1.1	Primeira foto tirada da lua pelo Dr. J. W. Draper de Nova York, 1840 [1].	2
1.2	Granulação solar. Imagem obtida por J. Janssen em 1877 [2].	4
2.1	Transformada de Haar.	10
2.2	Gráfico da linha L [3].	11
2.3	As projeções paralelas são realizadas medindo-se um conjunto de raios paralelos para vários ângulos diferentes [4].	12
2.4	Comportamento da bola de influência na norma euclidiana.	17
2.5	Comportamento da bola de influência na norma L_1	18
2.6	A bola L_p para diferentes valores de p	19
2.7	Esquemático de um tomógrafo [5].	21
2.8	<i>Scanner</i> tomográfico [5].	22
2.9	Feixe de fótons atravessando um corpo [5].	22
2.10	PET - Tomografia por Emissão de Pósitrons [5].	23
2.11	SPECT - Tomografia por Emissão de Fóton Único [5].	24
2.12	O conceito tomográfico básico é obter observações de estruturas coronais a partir de vários pontos de vista angulares diferentes. No plano que contém todas as naves espaciais, o problema se reduz à reconstrução de uma distribuição bidimensional de emissão, adaptado [6].	24

2.13	As observações medem a linha de visão projetada integral da emissividade volumétrica. Diferentes pontos de vista fornecem diferentes matrizes de projeção. A variação dessas matrizes está relacionada à variação espacial da distribuição de emissividade, adaptado [6].	25
2.14	Reconstrução de imagem a partir de projeções. A partir de várias direções diferentes, a radiação passa através do objeto ou seção transversal e inicia o imageamento. Essa radiação é coletada por um detector que envia o sinal para um computador fazer o processamento, revelando a estrutura interna do objeto, adaptado [7].	26
2.15	Matriz de <i>pixels</i> [5].	26
2.16	Densidade (linhas contínuas) e temperatura (linhas tracejadas) em diferentes camadas da atmosfera solar [8].	28
2.17	Fenômenos na coroa solar: Linhas de campo fechadas (<i>loops</i>), buracos coronais (CHs), <i>Helmet streamers</i> , <i>plumes</i> nos polos do Sol. Adaptado da imagem do instrumento AIA no comprimento de onda 21,1 nm, no dia 21 de setembro de 2017 [8].	29
2.18	O espectro solar de referência em condições de baixa atividade solar (linha preta ou linha que apresenta variações) [9] e o espectro solar como se o Sol fosse um corpo negro com uma temperatura de ~ 5800 K (linha vermelha ou contínua), adaptado de [10, 8].	31
2.19	O satélite SMM foi operado durante 1980-1989. Algumas falhas do instrumento ocorreram no início da missão, como o codificador de posição do <i>FCS</i> e vários giroscópios. Os reparos do satélite foram realizados por “Pinky” Nelson e Dick Scobee, do <i>Space Shuttle Challenger</i> , em abril de 1984. A abordagem do astronauta em sua poltrona voadora na espaçonave doente está documentada nesta figura [11].	32
2.20	O Telescópio de Imagens Ultravioleta Extrema (EIT) a bordo do Observatório Solar e Heliosférico (SoHO) é um telescópio multicamada de incidência normal. Ele grava desde 1996 imagens solares em disco inteiro em vários filtros, sensíveis a temperaturas coronais de 1 a 2 MK, com uma resolução espacial de 2,5 e uma cadência de algumas horas (cortesia da equipe do EIT) [11].	33

2.21	Esquerda: Conceito da perspectiva 3D da nave espacial STEREO em uma ejeção de massa coronal lançada do Sol. Direita: Órbitas do STEREO-A (vermelho) e STEREO-B (azul) em relação à órbita anual da Terra (verde) (crédito: NASA) [12].	34
2.22	Conceito artístico do SDO em órbita [13].	35
3.1	Visão geral da metodologia utilizada, em que apresenta os dois casos de utilizados para a realização do trabalho proposto.	39
3.2	Linhas radiais de trajetória de amostras (os pontos vermelhos representam as medidas tomadas), adaptado [14].	41
3.3	Pré-filtragem das medidas de entrada b e reconstrução separada de cada versão filtrada com as medidas b_{f1} , b_{f2} e b_{f3} , adaptado [14].	42
3.4	Imagem LASCO C2 da coroa solar, da missão SoHO, da coroa solar em 23 de dezembro de 1996 às 04:44 UT [15].	46
4.1	Reconstrução sem linhas radiais interpoladas da imagem-teste para diferentes números de projeções com 180° de alcance.	48
4.2	Reconstrução com linhas radiais interpoladas da imagem-teste para diferentes números de projeções com 180° de alcance.	50
4.3	Reconstrução com o procedimento dos coeficientes de Fourier em trajetória radial.	51
4.4	Reconstrução com a Retroprojeção Filtrada para diferentes números de projeções.	52
4.5	Reconstrução com a Retroprojeção Filtrada para número de projeção $k = 1000$	53

LISTA DE SÍMBOLOS, NOMENCLATURAS E ABREVIACÕES

<i>CS</i>	–	<i>Compressive Sensing</i>
<i>CCD</i>	–	<i>Charge Coupled Devices</i>
<i>UV</i>	–	Raios ultravioletas
<i>EUV</i>	–	Raios extremo ultravioletas
<i>TSI</i>	–	Irradiância solar total
<i>SSI</i>	–	Irradiância solar espectral
<i>SMM</i>	–	<i>Solar Maximum Mission</i>
<i>CME</i>	–	<i>Coronal Mass Ejections</i>
<i>SoHO</i>	–	<i>Solar and Heliospheric Observatory</i>
<i>NASA</i>	–	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
<i>ESA</i>	–	<i>European Space Agency</i>
<i>EIT</i>	–	<i>Extreme-ultraviolet Imaging Telescope</i>
<i>STEREO</i>	–	<i>Solar Terrestrial Relations Observatory</i>
<i>SDO</i>	–	<i>Solar Dynamics Observatory</i>
<i>LOS</i>	–	<i>Line-of-sight</i>
<i>POV</i>	–	<i>Point-of-view</i>
<i>SPECT</i>	–	<i>Single Photon Emission Tomography</i>
<i>PET</i>	–	<i>Positron Emission Tomography</i>
<i>WCS</i>	–	<i>World Coordinate System</i>
<i>FITS</i>	–	<i>Flexible Image Transport System</i>
<i>SECCHI</i>	–	<i>Sun Earth Connections Coronal and Heliospheric Investigation</i>
<i>SNR</i>	–	<i>Signal-to-noise ratio</i>
<i>IRLS</i>	–	<i>Iteratively reweighted least-squares</i>
<i>SSIM</i>	–	<i>Structural Similarity Index</i>
<i>IRIS</i>	–	<i>Interface Region Imaging Spectrograph</i>
$H\alpha$	–	Comprimento de onda do hidrogênio de transição $n = 3$ para $n = 2$
\mathcal{F}	–	Operador da transformada de <i>Fourier</i>
\mathcal{W}	–	Operador da transformada de <i>Wavelets</i>
\mathcal{R}	–	Operador da transformada de <i>Radon</i>
t	–	Tempo
R_{\odot}	–	Raio solar
T	–	Temperatura
σ	–	Constante de Stefan-Boltzmann
A	–	Matriz de medidas
x	–	Imagem na Forma Empilhada
b	–	Vetor de medidas

λ	–	Multiplicador de <i>Lagrange</i>
\hat{x}	–	Sinal no Domínio Transformado
\hat{T}	–	Matriz de Transformação Esparsificante
ω_s	–	Frequência de Amostragem
ω_m	–	Maior Frequência do sinal de estudo
L_0	–	Espaço métrico para solução combinatorial
L_1	–	Espaço métrico de <i>Manhattan</i>
L_2	–	Espaço métrico euclidiano
L	–	Linha de trajetória
p	–	Comprimento de perpendicular a linha de trajetória
k	–	Número de projeções

1 INTRODUÇÃO

Na astronomia, a definição da qualidade de uma imagem está associada a quantidade de fótons que o equipamento consegue detectar [16]. Além disso, para a maioria dos problemas astronômicos de compressão de dados, três propriedades principais devem estar sob controle: resolução (função de propagação de ponto), sensibilidade (capacidade de detectar sinais de baixo nível) e fotometria [17], onde cada propriedade é explorada com as técnicas descritas a seguir.

Em muitas aplicações de interesse prático, como em imagens astronômicas e imagens médicas, desejamos reconstruir um objeto (um sinal discreto, uma imagem discreta etc.) a partir de amostras incompletas de *Fourier*, e para tal foi desenvolvida a teoria do *Compressive Sensing* (CS). Depois do conhecido Teorema de Amostragem de *Shannon*, a introdução do CS é um grande avanço à comunidade de processamento de sinais [18, 19], tendo como principal característica, a avaliação da esparsidade da imagem [20].

A tomografia (do grego *tomos* = cortar, cortar e *graphein* = escrever) é um método de reconstrução 3D que usa imagens (ou cortes), de vários ângulos de aspecto. A tomografia é realizada por meio de imagens 2D, tomada de diferentes seções através de uma onda penetrante (raio-X ou rádio), usada em radiologia médica, arqueologia, biologia, geofísica, oceanografia, ciência dos materiais e astrofísica. As aplicações na física solar incluem a reconstrução 3D do plasma opticamente fino na coroa solar ou nas ejeções de massa coronal, usando raios-X e imagens de ultravioleta extremo (EUV), ou gráficos de coroa de luz branca [21].

A coroa solar é composta por plasma muito escasso que forma a parte superior atmosfera do Sol, começando a cerca de 2000 km acima do superfície solar. A coroa é extremamente quente, com temperaturas superior a 10^6 K [22]. As altas temperaturas da coroa são um pouco misteriosas. De maneira contraintuitiva, quanto mais se afasta da superfície solar, maior sua temperatura. Os astrônomos tentam resolver esse mistério há muito tempo.[23].

Uma missão da NASA chamada Espectrógrafo de imagem da região da interface

(IRIS) [24] pode ter fornecido uma resposta possível. A missão descobriu pacotes de material muito quente chamados "bombas de calor" que viajam do Sol para a coroa. Na coroa, as bombas de calor explodem e liberam sua energia como calor. Mas os astrônomos pensam que essa é apenas uma das muitas maneiras pelas quais a coroa é aquecida [23, 25].

Seu entendimento é de extrema importância, devido à extensão ao espaço por meio do vento solar e para compreender a natureza das suas altas temperaturas [23, 21].

1.1 Contextualização

Imagens são padrões de intensidade de luz nos quais a quantidade de luz em qualquer ponto corresponde à direção de origem da luz, que uma vez captada e organizada, ela pode ser detectada por uma emulsão de haleto de prata ou uma câmera eletrônica [16]. À séculos a humanidade admira e estuda os astros do céu noturno, porém somente no século XIX, onde em 1840, John William Draper (1811-1882), obteve o primeiro daguerreótipo bem-sucedido (corretamente exposto) da Lua usando um refletor de 13 cm com uma distância focal longa (exposições de 20 min) [26]. A Fig. 1.1 mostra a imagem obtida após o sucesso do procedimento.

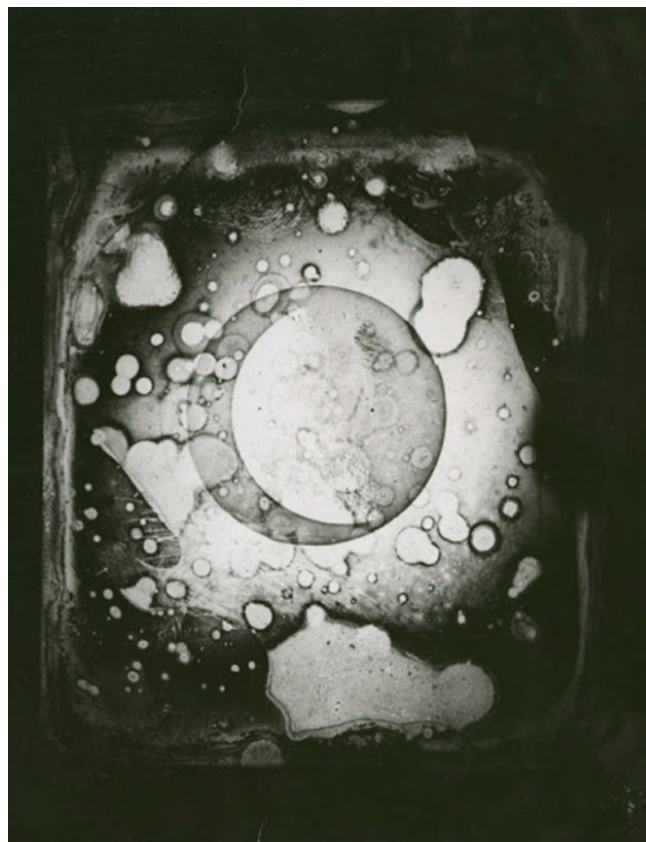


Figura 1.1. Primeira foto tirada da lua pelo Dr. J. W. Draper de Nova York, 1840 [1].

Com o avanço da tecnologia, os registros dos eventos astronômicos foram se tornando recorrentes e crescentes a cada ano, e em parte, isso se deve a pesquisas no infravermelho óptico e próximo, no qual, foi possível graças ao desenvolvimento de matrizes de imagens digitais, como dispositivos de carga acoplada (CCDs). O tamanho dos *arrays* digitais está crescendo continuamente, impulsionado pelas demandas da pesquisa astronômica por quantidades cada vez maiores de dados em períodos de tempo cada vez mais curtos. Como resultado, a comunidade astronômica também é confrontada, com uma necessidade de técnicas de compressão de dados [20, 16].

Dentro desse contexto, muitas técnicas de compressão de dados astronômicos foram usadas ou desenvolvidas [27]. Dentre elas, técnicas que não necessariamente seguiam o Teorema da amostragem de *Shannon*, como em casos do satélite *Herschel*, que não conseguiu utilizar métodos convencionais de compressão, por limitação do seu equipamento [17, 20].

Uma técnica desenvolvida no ano de 2004 por Donoho, Candès, Romberg e Tao [18, 28, 29] para aquisição de sinais que são escassos ou compressíveis, de modo a esparsidade ser uma propriedade inerente desses sinais para os quais, toda a informação contida no sinal pode ser representada apenas com a ajuda de poucos componentes significativos, em comparação com o comprimento total do sinal. Um sinal pode ter representação esparsa / compressível no domínio original ou em alguns domínios de transformação como transformada de *Fourier*, transformada de cosseno, transformada *wavelet*, etc [19]. Desta forma mesmo ainda sendo majoritariamente utilizada na área da engenharia biomédica, iniciou-se mesmo que de maneira tímida, a introdução do CS na área de compressão de dados astronômicos.

Assim como dito anteriormente, imagens multiespectrais são intimamente ligadas às imagens astronômicas. O primeiro Sistema de Sensores Multiespectrais *Landsat* (MSS), lançado em 1972, com suas 4 bandas espectrais, cada uma com cerca de 100 nm de largura e 80 nm de tamanho de pixel, iniciou a era moderna do sensoriamento remoto terrestre a partir do espaço. Existem sistemas de satélites operacionais que amostram quase todas as partes do espectro eletromagnético disponíveis com dezenas de bandas espectrais, e com tamanhos de pixel variando de menos de 1m a 1000 m, complementados por vários sistemas hiperespectrais aéreos com centenas de bandas espectrais, cada um no ordem de 10nm de largura [30]. Porém antes de chegar a este nível, a primeira utilização de imagens espectrais, foi no século XIX, com o astrônomo P. J. C. Janssen, usando um monocromador de luz dupla para visualizar a coroa solar e descobrir o elemento Hélio na mesma [2, 11], que por um longo tempo foi um dos maiores mistérios presentes na astrofísica [31], como mostra a Fig. 1.2.

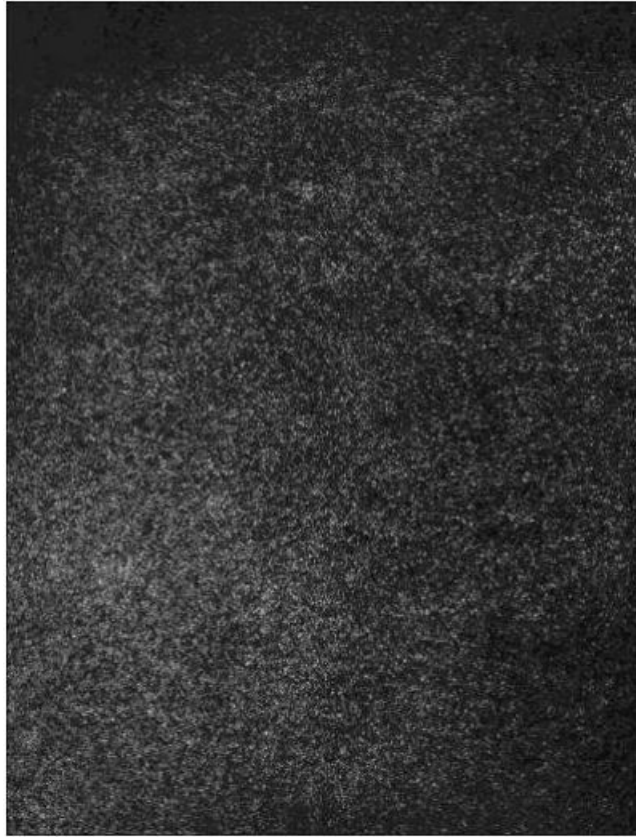


Figura 1.2. Granulação solar. Imagem obtida por J. Janssen em 1877 [2].

As primeiras observações da coroa solar, portanto, remontam a observações de eclipses antigos, relatadas por fontes indianas, babilônicas e chinesas, por exemplo, eclipses solares chineses em 2800 aC, o fracasso de uma previsão pelos dois azarados astrólogos reais chineses Hsi e Ho ao redor 2000 aC, a previsão bem-sucedida do eclipse solar de 28 de maio de 585 aC pelo matemático e filósofo grego Thales, ou o eclipse de 1919 de maio de 1919 em Sobral (Brasil) e Príncipe (África Ocidental), que foi observado por duas expedições do astrônomo britânico Arthur Stanley Eddington para provar a teoria da relatividade de Einstein [11].

Durante o século XX, sistemáticas medições diárias do campo magnético da superfície solar e do brilho da polarização da coroa foram feitas. Estes dados foram usados para reconstruir tridimensionalmente o campo magnético e a densidade de elétrons, mostrando perspectivas, antes intangíveis, da Terra ou em órbita (por exemplo, sobre a eclíptica), assim provendo informações sobre a organização global da coroa solar e suas seculares mudanças [32].

1.2 Definição do Problema Científico e Proposta de Pesquisa

Toda a busca pelo entendimento da coroa solar ao longo do tempo, vem se dando pela sua influência no campo magnético terrestre, e na era moderna humana (como funcionamento de satélites) [33]. Tais influências se devem às altas temperaturas presentes na coroa solar e sua extensão ao vento solar [25, 23].

Com o crescente aumento de quantidade e qualidade das imagens astronômicas, e a limitação de espaço, peso e equipamentos [27] que podem conter nos satélites de observação, como o *Hubble*, há uma grande necessidade de desenvolvimento de técnicas que consigam gerar imagens de alta qualidade, mesmo quando o equipamento não consegue trabalhar segundo o critério de *Shannon-Nyquist*.

Desta maneira, esta pesquisa se propõe a utilizar a técnica CS para reconstrução de imagens de tomografia da coroa solar, e comparar com técnicas já utilizadas na área.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

O objetivo deste trabalho é desenvolver um algoritmo que reconstrua imagens em raios X e γ da coroa solar, em alta qualidade, oriundas de satélites, em missões solares, utilizando da técnica de *Compressive Sensing*.

1.3.2 Objetivos Específicos

Este trabalho visa modelagem da técnica de CS, considerando a imagem esparsa no domínio de *Fourier*:

- Reconstruir a densidade de elétrons (intensidade) da coroa solar, a partir das suas projeções;
- Desenvolver um algoritmo que implemente a modelagem das técnicas descritas; e
- Implementar o algoritmo e reconstruir exemplos teóricos e se possível, casos reais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E ESTADO DA ARTE

2.1 Transformadas integrais

Uma transformada integral é qualquer transformação linear T como mostra a Eq. 2.1

$$(Tf)(u) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)K(u, t)dt, \quad (2.1)$$

em que a função f é a entrada da transformada, e a função Tf é o resultado. Uma transformada integral é uma espécie particular de operadores matemáticos e em geral, cada transformada integral corresponde a uma diferente escolha da função K , que é chamada de kernel (ou núcleo) da transformada, onde em geral, os núcleos são famílias de funções ortogonais, ou ainda, ortonormais, e dos limites de integração t_1 e t_2 . Alguns núcleos possuem núcleos inversos $K^{-1}(u, t)$ onde suas transformadas inversas são o seu próprio inverso, na forma da Eq. 2.2 [34, 3]

$$f(t) = \int_{u_1}^{u_2} ((Tf)(u))K^{-1}(u, t)du. \quad (2.2)$$

A conveniência de cada transformada depende do tipo de problema abordado.

2.1.1 Transformada de *Fourier*

O desenvolvimento da análise de Fourier tem uma longa história, envolvendo diferentes pessoas e a investigação de diversos fenômenos físicos. A utilização de “sombras trigonométricas” — ou seja, somas de senos e cossenos relacionados harmonicamente ou exponenciais complexas periódicas — para descrever fenômenos periódicos é datado pelo menos da época dos babilônios, que usavam ideias desse tipo para prever eventos astronômicos. A história moderna sobre o assunto começa em 1748, com L. Euler, que examinou o movimento de uma corda vibrante [35].

A transformada de Fourier é chamada de representação do domínio da frequência do sinal original. O termo transformada de Fourier refere-se à ambas representações do domínio frequência e a operação matemática que associa a representação domínio frequência a uma função temporal. A transformada de Fourier não é limitada a funções temporais, contudo para fins de convenção, o domínio original é comumente referido como domínio do tempo. Para muitas funções de interesse prático, pode-se definir uma operação de reversão: a transformada inversa de Fourier, também chamada de síntese de Fourier, de um domínio de frequência combina as contribuições de todas as frequências diferentes para a reconstituição de uma função temporal original [35, 36].

A transformada de tempo contínuo de Fourier e sua transformada inversa são apresentadas nas Eqs. 2.3 e 2.4 [3, 35]

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.4)$$

Onde \mathcal{F} é chamado operador de transformação de Fourier ou transformação de Fourier. Uma condição suficiente para que $f(t)$ tenha uma transformação de Fourier é que $f(t)$ é absolutamente integrável em $(-\infty, \infty)$. A convergência da integral segue imediatamente o fato de que $f(t)$ é absolutamente integrável. De fato, a integral converge uniformemente em relação a ω .

A transformada de tempo discreto de Fourier e sua transformada inversa são apresentadas nas Eqs. 2.5 e 2.6 [3, 35]

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.6)$$

A transformada de Fourier de tempo discreto compartilha muitas semelhanças com o caso de tempo contínuo. As principais diferenças entre os dois casos são a periodicidade da transformação de tempo discreto $X(e^{j\omega})$ e o intervalo de integração finito na equação de síntese. Essas diferenças vêm de um fato que, exponenciais complexas de tempo discreto que diferem em frequência por um múltiplo de 2π , são idênticas.

A Transformada clássica de Fourier inclui implicitamente uma hipótese sobre a estacionaridade dos sinais. Uma análise espectral adequada aos sinais não estacionários requer mais do que a transformada $Tf(u)$, e demanda a introdução de uma dependência no tempo e espaço na análise de Fourier, visto que a mesma enfatiza somente uma ou a outra, se possível, preservando a linearidade, assim tornando necessário o desenvolvimento de outras transformadas [37].

2.1.2 Transformada de *wavelets*

Como descrito anteriormente, a transformada de Fourier considera que o sinal é estacionário, uma alternativa para abordar o problema no plano conjunto tempo-frequência consiste em permitir uma resolução variável no tempo. A partir dessa necessidade, a ideia da Transformada de Fourier de Tempo curto STFT (ou Transformada de Gabor) é introduzir um parâmetro de frequência local (local no tempo) como se a Transformada de Fourier Local observasse o sinal através de uma curta “janela” dentro da qual o sinal permanece aproximadamente estacionário, assim a transformada local observa $f(t)$ “através” de uma janela $J(t)$ centrada no instante de tempo e de extensão “limitada”, antes do cálculo do espectro, como mostra a Eq. 2.7 [37]

$$STFT(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)J^*(\tau - t)e^{-j\omega t}dt. \quad (2.7)$$

Apesar das diversas escolhas para a janela, uma vez fixada a janela para a STFT, a resolução no tempo e na frequência f e t permanece constante em todo o plano $t - f$. Intuitivamente, quando a análise é visualizada como um banco de filtros, a resolução no tempo deveria aumentar com o aumento da frequência central dos filtros, ou seja, realizar a análise em banco de filtros compostos por passa-faixas com banda passante relativa constante, assim a transformada contínua de *wavelets* origina uma análise com janelas flexíveis cuja largura e altura se adaptam às frequências. A ideia da transformada é também, como no caso da transformada de Fourier em tempo curto, calcular o produto interno de f com uma família de funções $\psi_{a,\tau}$ dependentes de dois parâmetros. Neste caso, no entanto, essas funções $\psi_{a,\tau}$ são obtidas de uma função básica ψ (chamada onduleta mãe) por dilatações ou contrações – isto é, mudanças de escala – controladas pelo parâmetro a e translações, controladas pelo parâmetro τ como mostra a Eq. 2.8 [3, 38, 37]

$$\psi_{a,\tau} = |a|^{-\frac{1}{2}}\psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right), \quad a, \tau \in \mathbb{R}, a \neq 0. \quad (2.8)$$

Definindo a transformada contínua de *wavelets* e a sua transformada inversa como a Eq. 2.9 e 2.10 [38]

$$\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau) = \langle f, \psi_{a, \tau} \rangle = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right)} dt, \quad (2.9)$$

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau) \psi_{a, \tau} \frac{da}{a^2} d\tau. \quad (2.10)$$

Onde o $|a|^{-\frac{1}{2}}$ é introduzido para as diversas funções de mesma energia.

As propriedades da transformada contínua de *wavelets* dependem das propriedades da sua função original ψ , onde esta exige ser bem localizada no tempo e na frequência, devendo satisfazer a condição de admissibilidade C_ψ , como mostra a Eq. 2.11

$$C_\psi = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty, \quad (2.11)$$

para tal, a função ψ deve ter uma condição de decaimento e portanto de certa forma, oscilar. Por esta característica, a transformada contínua é naturalmente redundante, exigindo que algoritmos eficientes tenham que restringir o parâmetro de escala a e a translação τ a valores discretos, ou seja, calcular $\sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \tau)$ apenas em uma rede discreta do plano tempo-escala [3, 38].

Historicamente, a primeira base ortonormalizada construída é a bem conhecida base de Haar, introduzida muito antes do aparecimento do conceito de *wavelets*. Esta *wavelets* tem ótimas propriedades de localização no tempo, mas a sua localização na frequência é muito fraca, a Fig. 2.1 apresenta um caso da transformada de Haar [38, 3, 39].

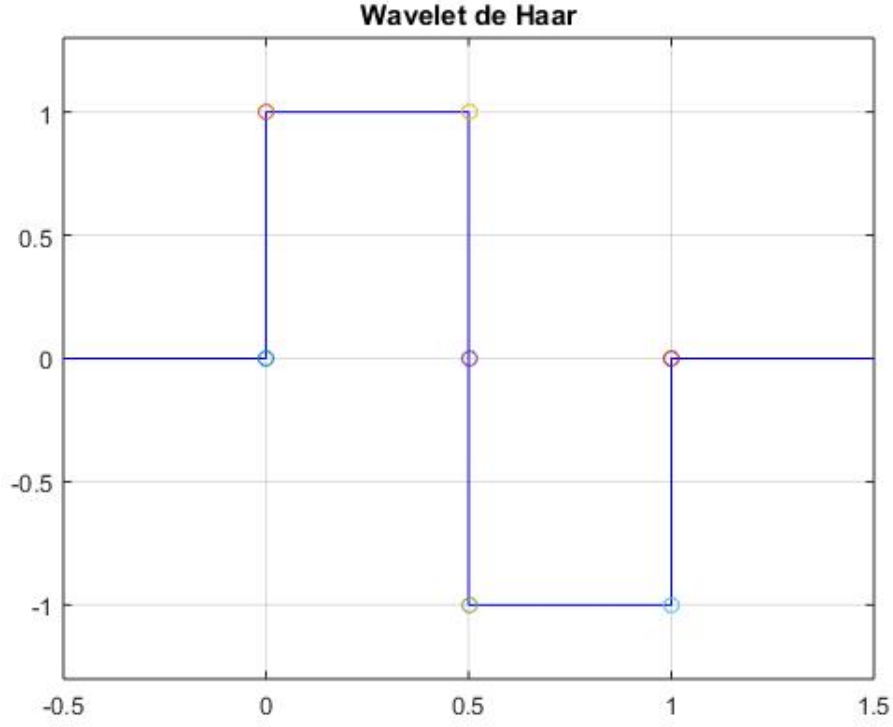


Figura 2.1. Transformada de Haar.

Onde este sinal é definido pela Eq. 2.12

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t < 1 \\ 0, & \text{para outros valores de } t \end{cases} . \quad (2.12)$$

A chamada base de Shannon é outro exemplo de uma *wavelets* ortogonal, sendo as suas propriedades de localização ao tempo-frequência como que complementares da base de Haar, como mostra a Eq. 2.13 [38, 3].

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi t} (\sin(2\pi t) - \sin(\pi t)) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{\left(\frac{\pi t}{2}\right)} \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right) \quad (2.13)$$

2.1.3 Transformada de Radon

A definição da transformada de Radon é dada por: Se L é qualquer linha reta no plano $x - y$ (ou, em \mathbb{R}^2) e ds é o comprimento do arco ao longo de L , a transformação Radon de uma função $f(x, y)$ de duas variáveis reais é definida por sua integral ao longo

de L como [3, 40]

$$\hat{f}(p, \phi) = \mathcal{R}\{f(x, y)\} = \int_L f(x, y) ds. \quad (2.14)$$

Em outras palavras, a totalidade de todas essas integrais de linha constitui a transformação Radon de $f(x, y)$ e cada integral de linha é chamada de amostra da transformação Radon de $f(x, y)$. Assim, a transformada Radon \hat{f} de f pode ser vista como uma função definida em todas as linhas retas no plano e o valor de $\hat{f}(p, \phi)$ em um dado L é a integral de $f(x, y)$ sobre essa linha, como mostra a Fig. 2.2.

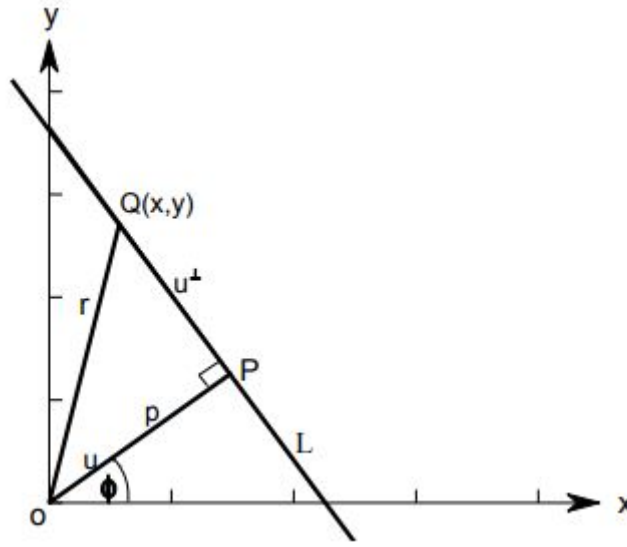


Figura 2.2. Gráfico da linha L [3].

Como mostra a Fig. 2.2, a equação da linha L é dada por $p = x \cos \phi + y \sin \phi$, onde p é o comprimento da perpendicular desde a origem até L e ϕ é o ângulo que a perpendicular faz com o eixo x positivo. Se girarmos o sistema de coordenadas em um ângulo ϕ e rotularmos os novos eixos por p e s , então $x = p \cos \phi - s \sin \phi$, $y = p \sin \phi + s \cos \phi$. Consequentemente, a transformação Radon (Eq. 2.14) pode ser definida pela Eq. 2.15

$$\mathcal{R}\{f(x, y)\} = \hat{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p \cos \phi - s \sin \phi, p \sin \phi + s \cos \phi) ds. \quad (2.15)$$

Esta é uma definição bidimensional. Para generalizar são introduzidos os vetores unitários $u = (\cos \phi, \sin \phi)$ e $u^\perp = (-\sin \phi, \cos \phi)$, de modo que $x = (x, y) = (r, \phi) = pu + tu^\perp$ para algum parâmetro escalar t , onde r e ϕ são as coordenadas polares usuais. A equação da linha L agora pode ser escrita em termos do vetor unitário u como $p = x \cdot u = x \cos \phi + y \sin \phi$. Usando a definição da função delta do Dirac, expressamos (Eq.

2.14) na forma da Eq. 2.16

$$\hat{f}(p, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(pu + tu^{\perp}) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(p - x \cdot u) dx. \quad (2.16)$$

Sendo ϕ restrito à $[0, \pi]$ e sendo a correlação entre a transformada de Radon e Fourier (Teorema de cortes de Fourier) [5, 40]. A Fig. 2.3 mostra graficamente o somatório da projeções paralelas em diferentes ângulos.

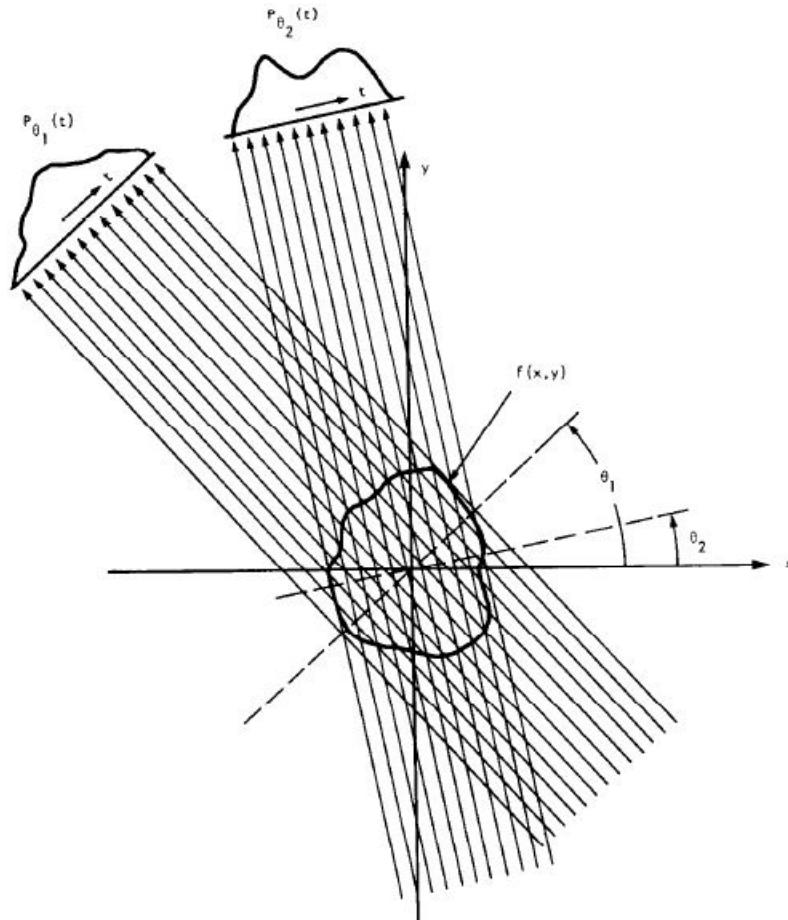


Figura 2.3. As projeções paralelas são realizadas medindo-se um conjunto de raios paralelos para vários ângulos diferentes [4].

A partir da transformada n-dimensional de Fourier, coordenadas polares hiperesféricas e o teorema de cortes de Fourier [3, 4], a transformada inversa de Radon é dada na Eq. 2.17

$$f(x) = \int_{|u|=1} h(x \cdot u, u) du, \quad (2.17)$$

Onde

$$h(t, u) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \rho^{n-1} e^{-j\rho(p-t)} \hat{f}(p, u) dp. \quad (2.18)$$

Por ser definida entre 0 e 2π , é possível ser discretizada a partir da série de Fourier, no qual é apresentado alguns algoritmos em [5, 41, 4].

O número de projeções é finito, resultando em “buracos” no espectro da imagem, onde não existem componentes de frequência. Este problema é contornado fazendo-se a interpolação (filtragem) destes dados. No entanto, como a densidade dos pontos diminui à medida que se afasta do centro (região de componentes de alta frequência), os erros causados pela interpolação tornam-se maiores. Em função da linearidade da transformada de Fourier, a reconstrução pode ser feita tanto no domínio da frequência, como descrito anteriormente, como no espaço, sendo, neste caso, denominada retroprojeção filtrada. Segundo o teorema de cortes de Fourier [5], os espectros das projeções somam-se no ponto correspondente ao nível DC da imagem (ponto $F(0,0)$, onde $F(u,v)$ é a transformada de Fourier 2D de $f(x,y)$) e tornam-se esparsos em regiões de alta frequência. Portanto, a filtragem utilizada nas projeções, além limitar o espectro no intervalo $[-W, W]$, deve atribuir pesos diferentes às diferentes componentes de frequência de espectro de cada projeção. Na prática, no lugar de se calcular a transformada inversa de cada projeção isolada no espectro bidimensional, cada uma das projeções filtradas, no domínio do espaço, é replicada, sendo suas cópias dispostas paralelamente, formando um plano, com o ângulo de inclinação correspondente ao ângulo utilizado na aquisição dos dados da projeção. A soma dos n planos, correspondente às n projeções, resulta na imagem reconstruída por retroprojeção filtrada, como mostra a Eq. 2.19 [4, 42]

$$\mu(x, y) = \int_0^\pi \lambda_\phi^*(x') d\phi|_{x'=x\cos\phi+y\sin\phi}, \quad (2.19)$$

em que $\lambda_\phi^*(x') = \lambda_\phi(x') \otimes h(x')$ e é o filtro passa alta no domínio do espaço.

2.2 Compressive Sensing

A medida que a civilização moderna, ano após ano, aumenta cada vez mais a quantidade de dados adquiridos e explorados, têm-se a necessidade de uma melhor análise do que são os dados adquiríveis e os que “podem ser descartados” com quase nenhuma perda perceptual. O fenômeno da compressibilidade presente levanta questões muito naturais, como por que tanto esforço para adquirir todos os dados quando a maior parte do que obtemos será descartada e se não podemos apenas selecioná-las previamente [43]. Desta

maneira, o CS foi desenvolvido para projetar protocolos de aquisição de dados compactados, que executam como se fosse possível adquirir diretamente apenas as informações importantes sobre os sinais / imagens - com efeito, não adquirindo a parte dos dados que acabaria sendo “descartada” por compressão com perda e reconstruir a partir de muito menos dados ou medidas do que normalmente é necessário [44, 43].

De um ponto de vista geral, a esparsidade e de forma mais genérica, a compressividade desempenha papel fundamental em muitos campos da ciência, e não seria diferente com o CS. Inicialmente, assumindo que o sinal de interesse seja vetor $x \in R^m$, onde x pode ser um sinal ou imagem com m amostras ou *pixels*, e que existe uma base ortonormal A . Assumindo também que o sinal é compressível [17, 43, 44], logo esta formulação possui o objetivo de reconstruir sinais com frequência de amostragem incompletas.

2.2.1 Amostragem de sinais

Ao se falar de processamento de sinais, de forma geral, sob certas condições, um sinal de tempo contínuo pode ser completamente recuperado a partir de uma sequência de suas amostras fornece um meio (forma) para representar um sinal de tempo contínuo por um sinal de tempo discreto. Este procedimento é realizado, devido ao fato do processamento de sinais de tempo discreto ser mais flexível (como a resposta ao ruído) e normalmente preferível ao processamento de sinais de tempo contínuo [45].

A teoria de amostragem clássica, ou teorema de *Shannon-Nyquist*, considera que a frequência de amostragem ω_s , seja superior a maior que o dobro da frequência ω_m , do sinal x [45], como mostrado na Eq. 2.20

$$\omega_s > 2\omega_m. \quad (2.20)$$

Este critério mínimo muitas vezes não pode ser atendido, como detalhado na Seção 1.1, e para que haja a garantia de reconstrução do sinal, tem-se a necessidade que mesmo com um número insuficiente de amostras, de acordo com o teorema de *Shannon-Nyquist*, também possa ser completamente recuperado [46].

Nas seções subsequentes, será apresentado a teoria na qual se embasa esse trabalho, para garantir a reconstrução das imagens astronômicas, mesmo não satisfazendo as condições de *Shannon-Nyquist*.

2.2.2 Teorema de minimização

Por ser um método para reconstrução de imagens, onde o número de amostras não é suficiente para se aplicar o critério necessário de *Shannon-Nyquist*, este é naturalmente um problema de sistema linear subdeterminado [47], onde é representado pela Eq. 2.21

$$b = Ax, \quad (2.21)$$

onde o sinal x é a imagem na sua forma empilhada de dimensões $n \times 1$, A é a matriz de medidas de dimensões $l \times n$, sendo $n \gg l$ e b é o vetor de medidas obtidas de dimensão $l \times 1$.

Em que x , a incógnita do problema, seja obtida dado o vetor b . Em geral, este tipo de problema possui infinitas soluções. Das infinitas possibilidades, pode-se encontrar a solução de energia mínima [48], assim como na Eq. 2.22

$$x^* = \underset{x}{\operatorname{argmin}} \|x\|_2^2 \text{ sujeito a } Ax = b. \quad (2.22)$$

Para minimizar a função, a partir da função de *Lagrange*, que é uma técnica de otimização convexa para encontrar pontos críticos em uma função de uma ou mais variáveis suscetíveis a uma ou mais restrições [49]. Desta maneira, o multiplicador de Lagrange da Eq. 2.22 é mostrado na Eq. 2.23

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \|x\|_2^2 + \lambda^H (Ax - b), \quad (2.23)$$

onde o λ é o vetor multiplicador de *Lagrange*, com as mesmas dimensões de b e λ^H sua hermitiana. Calculando o gradiente em relação a cada variável da função, temos que

$$\begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) = \frac{1}{2} x^H x + \lambda^H (Ax - b) \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) = Ax - b. \end{cases}$$

Igualando o sistema ao vetor nulo e isolando x , resolve-se o problema de reconstrução, como mostra na Eq. 2.24

$$x = A^H (AA^H)^{-1} b. \quad (2.24)$$

Porém, não necessariamente a solução de mínimos quadrados é a resposta que se procura para este problema, pois o sinal procurado geralmente é uma estrutura organizada e pela teoria da informação, o grau de desordem do sistema é ligado ao seu nível de energia [50]. Também se sabe da complexidade computacional que A apresenta, assim o que se busca é uma solução esparsa [48, 47, 44, 51].

2.2.3 Esparsidade

Diz-se que o sinal x é esparsos em A se a maioria das entradas do vetor b é zero ou próximo de zero e, portanto, apenas algumas têm amplitudes significativas. Em outras palavras, o sinal pode ser eficientemente aproximado (com baixa erro de aproximação ou distorção), a partir de apenas alguns coeficientes significativos [17]. Considerando a transformação linear esparsificante da matriz \hat{T} , define-se uma nova variável \hat{x} , sendo esta esparsa, na Eq. 2.25

$$\hat{T}x = \hat{x}. \quad (2.25)$$

Por possuir esta característica, como provado em [48], a maior parte do conjunto de soluções da reconstrução de imagens utilizando a norma euclidiana não pertence ao conjunto da norma euclidiana. Desta maneira, para a solução exata do problema, é proposto a solução de otimização combinatorial, ou norma L_0 .

2.2.4 Solução de otimização combinatorial

A norma L_0 é uma solução de otimização convexa, no qual se proporciona a solução de maneira exata sistema subdeterminados, para os quais, exista uma solução suficientemente esparsa [51].

Assim como feito na seção 2.2.2, na equação 2.22, se propõe a calcular o argumento que minimiza a função, porém se utilizando da norma L_0 e a definição da Eq. 2.25. Assim, a reconstrução a ser feita inicialmente é descrita na Eq. 2.26

$$\hat{x}^* = \underset{\hat{x}}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\mathbf{x}}\|_0 \text{ sujeito a } A\hat{T}^{-1}\hat{x} = b. \quad (2.26)$$

Em geral, utilizar a norma L_0 é impraticável, pois possui complexidade combinatorial. Sendo as normas L_p , entre $0 < p < 1$ e a norma L_1 , um “relaxamento” convexo da norma

L_0 , são estas as utilizadas de maneira efetiva [51].

2.2.5 Propriedades das p-normas

Como dito na seção 2.2.2 e 2.2.3, a teoria de minimização é baseada na norma euclidiana, onde apresenta o conjunto de soluções desta norma, sua área de influência, ou bola, cresce igualmente em todas as direções [52], como apresentado na Fig. 2.4.

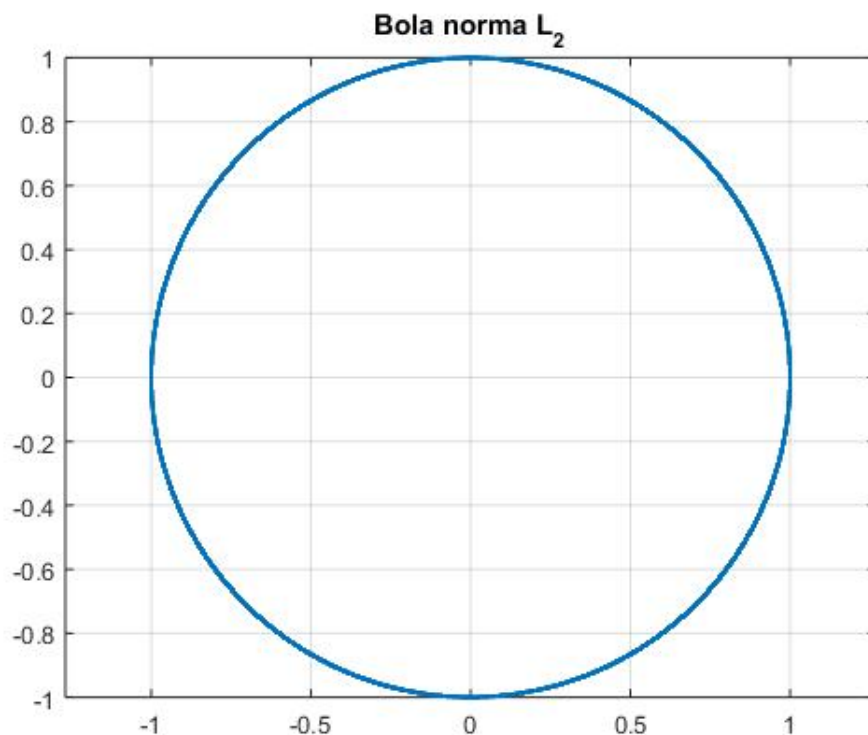


Figura 2.4. Comportamento da bola de influência na norma euclidiana.

Por esta solução e a otimização combinatorial não serem soluções viáveis, foi-se necessário o estudo das p-normas, como descrito na seção 2.2.4.

Os espaços funções da forma L_p têm um papel central em várias questões de análise. Esta importância se deve ao fato de eles serem uma generalização dos espaços L_2 [53, 54]. A definição da norma L_p é apresentado na Eq. 2.27, onde para as p-normas, p é definido entre $0 < p < \infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.27)$$

Para valores de $p = 1$, obtêm-se a norma L_1 , ou norma de *Manhattan* e para $p = 2$ norma L_2 , ou norma euclidiana [52].

A área de influência ou bola da norma L_1 , o raio de crescimento r da bola é determinado por $|x - a| < r$, onde a é o centro da bola [52], assim como mostrado na Fig. 2.5.

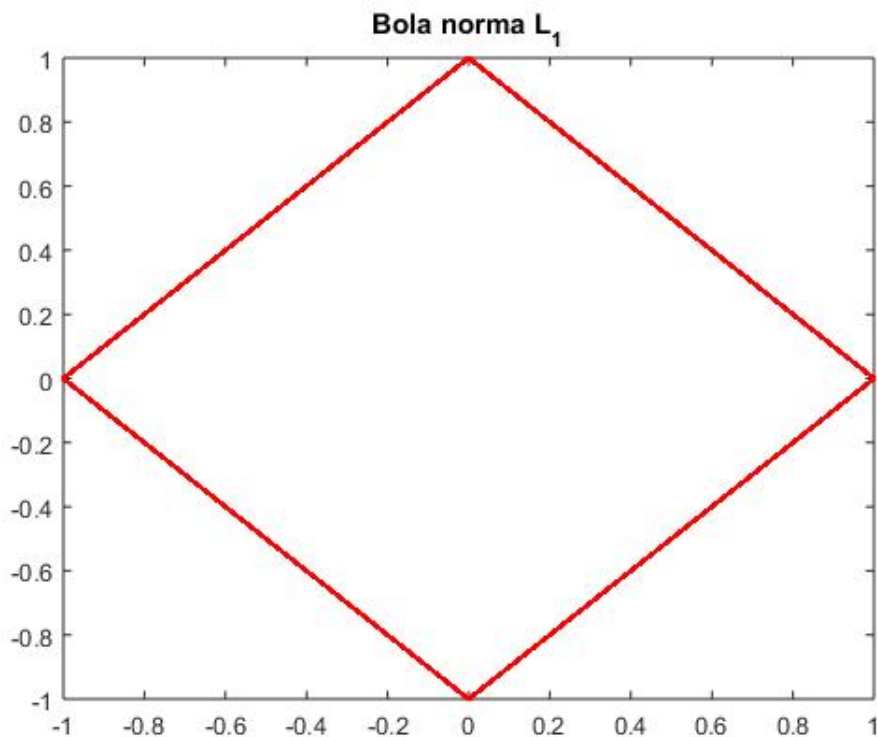
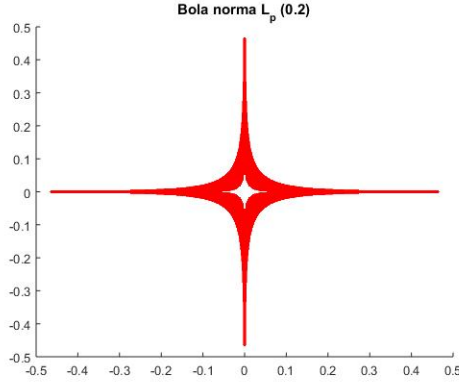


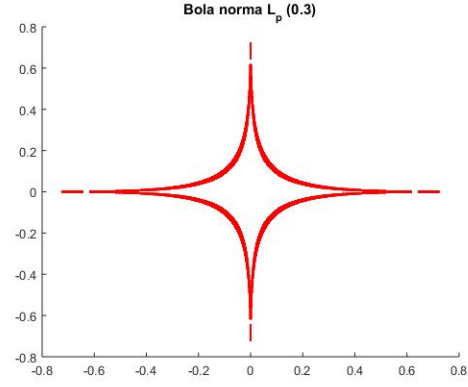
Figura 2.5. Comportamento da bola de influência na norma L_1 .

Por ser a norma L_p do tipo côncava, apesar de aumentar a complexidade de solução ela garante a unicidade de solução do sistema [54], porém a norma L_1 é menos suscetível a influência de ruído, também sendo bastante utilizada para a reconstrução neste tipo de problema.

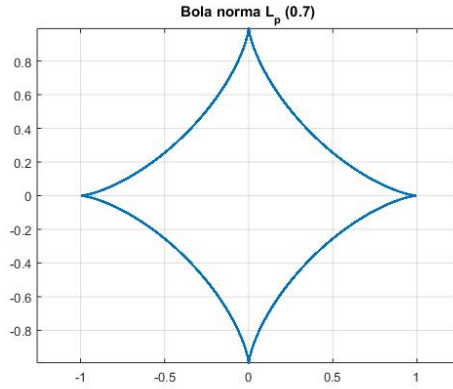
Sendo as normas L_p , um “relaxamento” convexo da norma L_0 [51], a sua área de influência ou bola da norma é apresentação na Fig. 2.6.



(a) Para p sendo 0.2.



(b) Para p sendo 0.3.



(c) Para p sendo 0.7.

Figura 2.6. A bola L_p para diferentes valores de p .

Assim como visto na Fig. 2.6, quanto menor o valor de p , mais ele se aproxima da norma L_0 , aumentando sua complexidade de resolução, porém melhorando a mesma.

2.2.6 Proposta de solução

Utilizar as p-normas e a norma de *Manhattan* aplicadas a Eq. 2.26, a reconstrução é apresentada na Eq. 2.28 e Eq. 2.29

$$\hat{x}^* = \underset{\hat{x}}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\mathbf{x}}\|_1 \text{ sujeito a } A\hat{T}^{-1}\hat{x} = b, \quad (2.28)$$

$$\hat{x}^* = \underset{\hat{x}}{\operatorname{argmin}} \|\hat{\mathbf{x}}\|_p^p \text{ sujeito a } A\hat{T}^{-1}\hat{x} = b. \quad (2.29)$$

Podendo esta condição de sujeição ser alterada (no caso da Eq. 2.28) para uma

condição de inequação em relação à um erro [14].

2.3 Aplicações de Tomografia Computadorizada

A palavra tomografia não é nova. Ela pode ser rastreada até o início da década de 1920, quando vários pesquisadores estavam desenvolvendo métodos para criar uma imagem de uma camada ou seção específica do corpo. Naquela época, termos como “radiografia de seção corporal” e “estratigrafia” (do estrato, que significa “camada”) foram usadas para descrever a técnica. Em 1935, Grossman refinou a técnica e a rotulou como tomografia (do Tomos gregos, significando “seção”). Um tomograma convencional é uma imagem de uma seção do paciente orientada paralelamente ao filme. Em 1937, Watson desenvolveu outra técnica tomográfica na qual as seções eram seções transversais; essa técnica foi referida como tomografia axial transversal. No entanto, essas imagens careciam de detalhes e clareza suficientes para serem úteis na radiologia diagnóstica, impedindo que a técnica fosse montada como uma ferramenta clínica [7].

Atualmente a busca por melhorar a qualidade da imagem e redução do tempo de exposição necessários são os focos dos desenvolvimentos acadêmicos [21, 5].

2.3.1 História da tomografia

Wilhelm Röntgen em 1895 descobriu os raios X enquanto realizava experimentos com tubos de raios catódicos. Nestes experimentos, utilizou telas fluorescentes, que começavam a se iluminar quando eram atingidas pela luz emitida pelo tubo, este efeito persistia mesmo quando o tubo era colocado dentro de uma caixa de papelão. Ele percebeu que este tubo não emitia apenas luz, mas também um novo tipo de radiação, que ele chamou de raios X devido a sua estranha natureza. Este novo tipo de radiação não podia apenas atravessar a caixa mas também atenuava de maneira diferente em vários tipos de materiais e permitia, como a luz, ser capturada em um filme fotográfico. Isto abriu um grande leque de possibilidades para o seu uso na medicina. A primeira “Foto de *Röntgen*”, como foi chamada na época, de uma mão foi feita apenas alguns meses depois da descoberta dos raios X, e a natureza dos raios X como pulsos eletromagnéticos de radiação de curto alcance foi estabelecida por *Max von Laue* em 1912 [5, 55].

O primeiro equipamento, o tomógrafo, comercialmente viável foi feito em 1972 em Londres, onde independente da geração, é constituído por um mecanismo que move um tubo de raios X de forma circular e um conjunto de detectores (fixos ou móveis) denominado *gantry*. O processo de escaneamento de um objeto depende de seu modelo e

programação, uma vez que está relacionado às movimentações do tubo de raios X sobre o suporte central e de como os feixes são detectados, como mostra a Fig. 2.7. O objeto a ser escaneado então é posto no suporte central ao *gantry* e é deslocado para o seu interior. Quando o *gantry* rotaciona-se ao redor do suporte central e transmite os feixes de raios X, as estruturas internas do objeto atenuam a radiação incidente e a quantidade de fótons do lado oposto são mensuradas através dos detectores. Processando esses valores obtidos através de um computador, obtemos uma imagem de tomografia computadorizada. Vale ressaltar que antes da tomografia computadorizada, já existia outros tipos de tomografia, como a a Tomografia Linear e a Tomografia Axial Transversal [56].

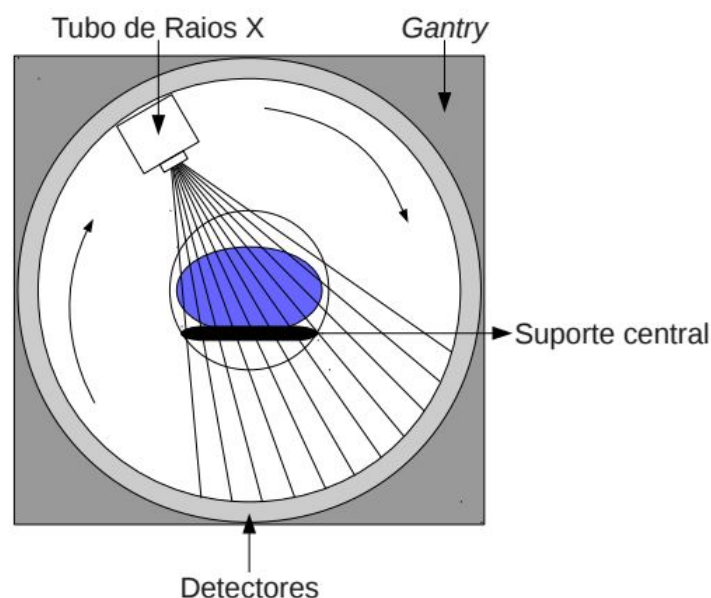


Figura 2.7. Esquemático de um tomógrafo [5].

Ao decorrer da evolução dos tomógrafos, foi-se priorizando aumentar a velocidade de obtenção dos cortes e de melhorar a qualidade da imagem. A Fig. 2.8 apresenta o processo de escaneamento que é feito em forma de leque, e para cada feixe emitido existe um detector cobrindo a área atingida pelo feixe, onde é a forma mais eficiente de corte [5, 55, 56].

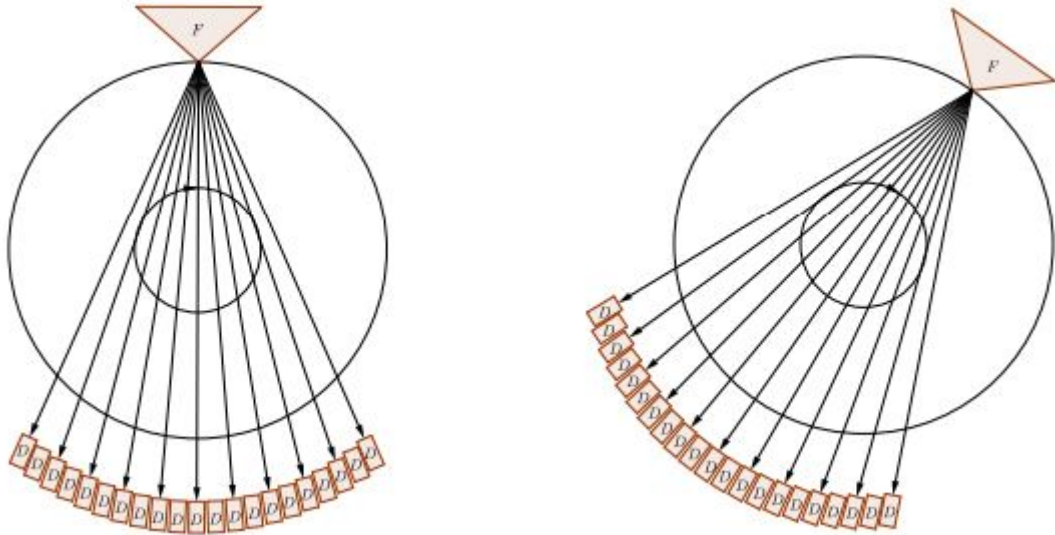


Figura 2.8. *Scanner tomográfico* [5].

2.3.2 Princípios da tomografia computadorizada

Nesta seção, será introduzido o conceito de Tomografia computadorizada por transmissão e por emissão. A tomografia computadorizada por transmissão tem por objetivo obter uma imagem de uma seção transversal de um objeto de estudo. Na tomografia computadorizada temos diversas projeções tomadas em direções diferentes no intuito de reconstruir as características de densidade do tecido em cada ponto ou pequena região no interior de um corpo. Na tomografia computadorizada é conveniente restringir o corpo a apenas um plano, ou corte. Deste modo, a incógnita passa a ser uma função f a valores reais, definida em um subconjunto do plano \mathbb{R}^2 , que representa a propriedade do tecido que chamaremos “coeficiente linear de atenuação” (ou simplesmente “atenuação”), como mostra a Fig. 2.9 [5, 57].

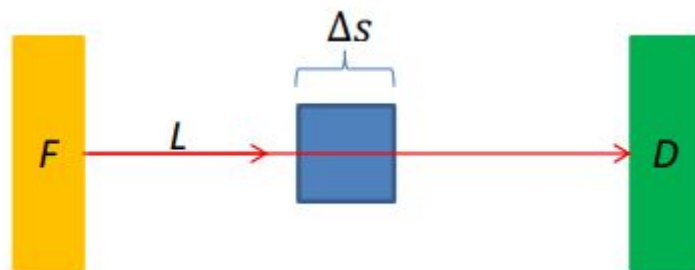


Figura 2.9. Feixe de fótons atravessando um corpo [5].

Já com a Tomografia por emissão o coeficiente de atenuação é a intensidade de emis-

são, e a buscamos determinar a partir de leituras de fótons emitidos para o exterior de um objeto de estudo quando aplicamos um composto radioativo em seu interior, conta com as duas mais conhecidas modalidades SPECT e PET (Tomografia por Emissão de Fóton Único e Tomografia por Emissão de Pósitrons) [58, 5].

Na PET um composto artificial que sofre um decaimento beta positivo emitindo um pósitron. Este pósitron viaja pelo tecido por uma distância bastante curta, onde sofre uma redução em sua energia cinética até um ponto em que possa interagir com um elétron e, quando isto ocorre, a reação produz dois fótons que viajam aproximadamente em direções opostas sendo esses fótons então detectados pelo aparelho de tomografia PET, sendo estas dependentes da detecção simultânea ou coincidente do par de fótons que viajam nestas direções opostas, e os que não são detectados simultaneamente (ou quase simultaneamente) são ignorados, como mostra a Fig. 2.10 [56, 59, 5].

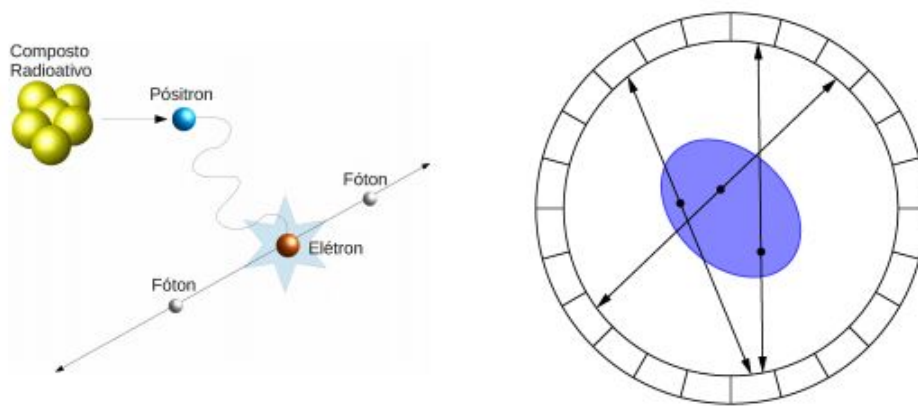


Figura 2.10. PET - Tomografia por Emissão de Pósitrons [5].

Na SPECT o composto utilizado é natural e quando sofre um decaimento, apenas gera um fóton que é detectado se conseguir passar com sucesso através dos colimadores, como mostra a Fig. 2.11. Colimadores são um conjunto de pequenos septos feitos de chumbo que impedem os fótons que não viajam de maneira ortogonal de chegarem nos detectores, deste modo, como muitos fótons são absorvidos por estes colimadores, as imagens reconstruídas através deste tipo de tomografia tendem a ser mais pobres e de pior qualidade quando comparadas com as geradas pelo PET. Utilizando o modelo matemático contínuo e não considerando fatores como atenuação, espalhamento, baixa estatística, etc, a tomografia por emissão também é representada pela Transformada de Radon, porém em sua forma atenuada [56, 5, 59].

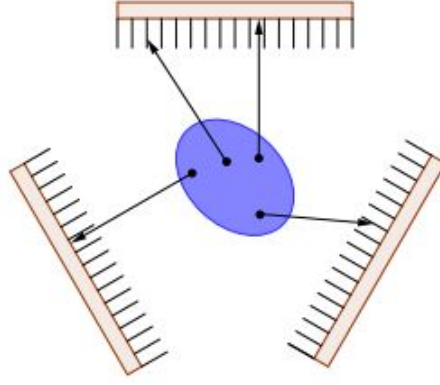


Figura 2.11. SPECT - Tomografia por Emissão de Fóton Único [5].

Como descrito em [6], para imagens de tomografia solar, presume-se que em um modelo básico várias naves espaciais idênticas (este número pode variar) estejam observando a coroa de diferentes posições angulares (também é permitido que as posições angulares variem) em uma órbita de 1 AU na eclíptica, semelhante a o arranjo mostrado na Fig. 2.12.

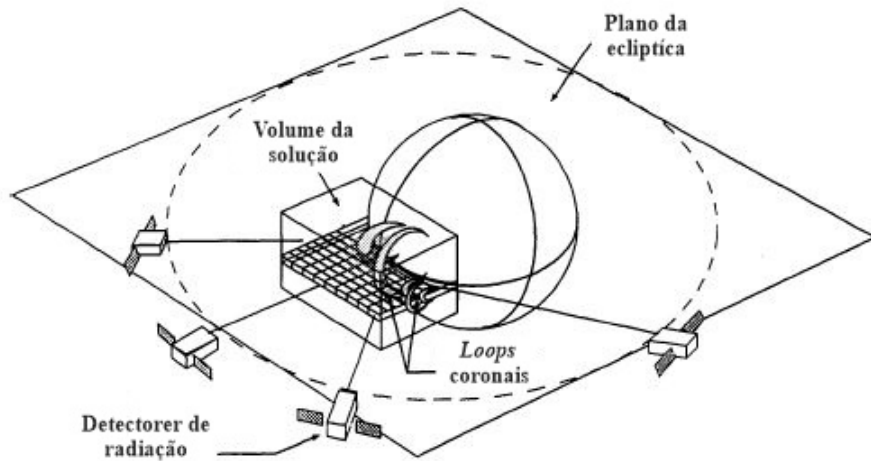


Figura 2.12. O conceito tomográfico básico é obter observações de estruturas coronais a partir de vários pontos de vista angulares diferentes. No plano que contém todas as naves espaciais, o problema se reduz à reconstrução de uma distribuição bidimensional de emissão, adaptado [6].

No plano central foi assumida uma fonte de emissão. Essa fonte pode ser vista como a emissão de *loops* que passam pelo plano eclíptico, somando-as essencialmente a emissão ao longo da linha de visão, como mostra na Fig. 2.13.

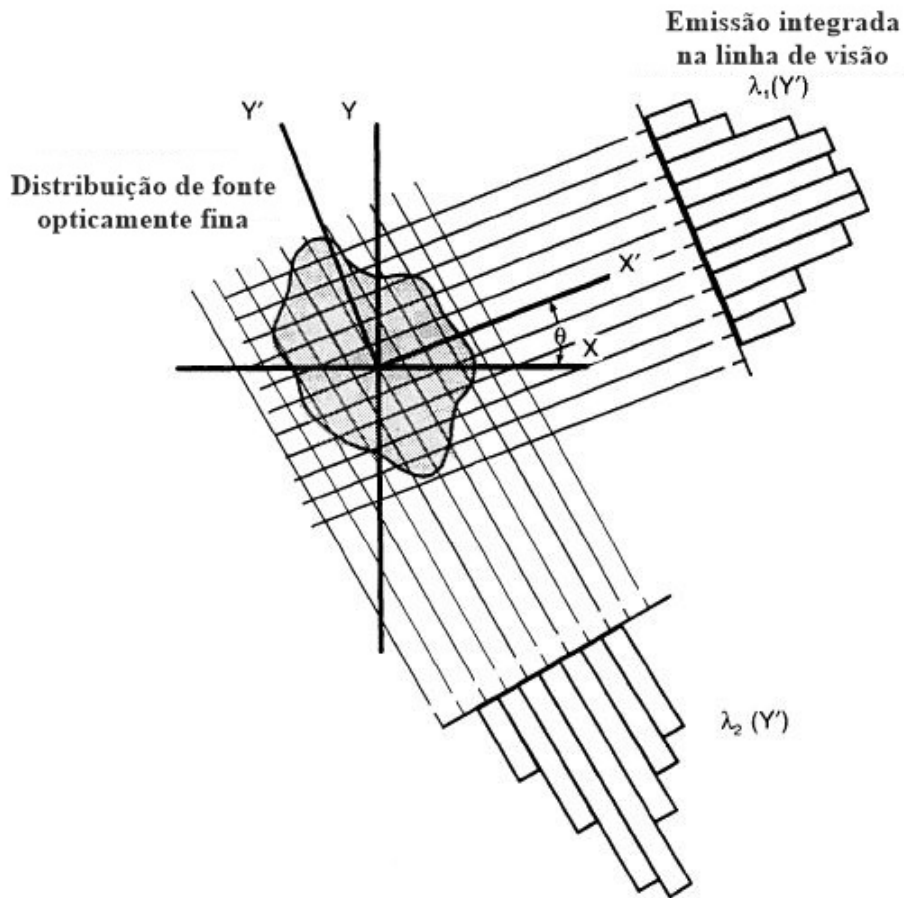


Figura 2.13. As observações medem a linha de visão projetada integral da emissividade volumétrica. Diferentes pontos de vista fornecem diferentes matrizes de projeção. A variação dessas matrizes está relacionada à variação espacial da distribuição de emissividade, adaptado [6].

2.3.3 Reconstrução de imagens tomográficas

De maneira geral, como mostrado em Fig. 2.14, por diferentes direções a radiação passa atrás do objeto de interesse, um equipamento o coleta e esse sinal é enviado a um computador para ser processado [7].

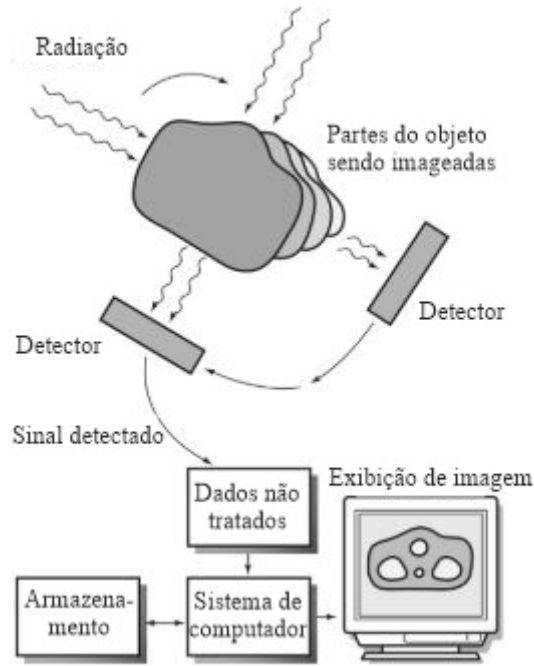


Figura 2.14. Reconstrução de imagem a partir de projeções. A partir de várias direções diferentes, a radiação passa através do objeto ou seção transversal e inicia o imageamento. Essa radiação é coletada por um detector que envia o sinal para um computador fazer o processamento, revelando a estrutura interna do objeto, adaptado [7].

Ao considerar que o corte do objeto que se quer realizar a tomografia esteja contido em um *pixel*, e aceitar que a atenuação seja constante em cada um deles, pode-se numerar de 1 a n os *pixels* desta área e chamar de x_j o valor de atenuação no pixel j , transformando nossa incógnita, em uma função discreta $x = (x_1, \dots, x_n)$, como mostra a Fig 2.15 [5].

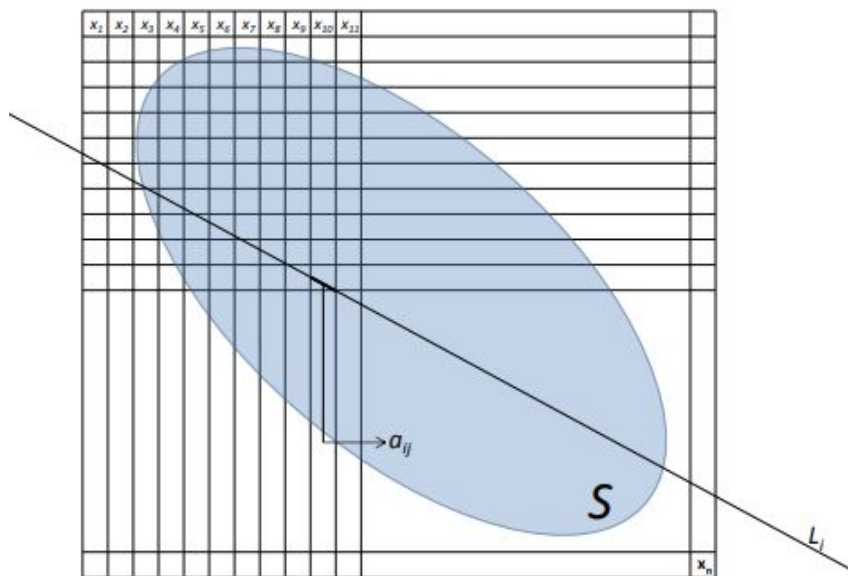


Figura 2.15. Matriz de *pixels* [5].

Reduzindo a um sistema linear do tipo $Ax = b$ e podendo ser aplicado a teoria descrita na Seção 2.2.

2.4 Observação da Coroa Solar

O que vemos com nossos olhos do nosso Sol, ou dos bilhões de estrelas da nossa galáxia, é a radiação ótica emitida na superfície da estrela, na chamada fotosfera. A emissão ótica produzida pelo espalhamento de Thomson na atmosfera mais tênue ou acima, na coroa, é muitas ordens de magnitude menos intensa e, portanto, só pode ser vista quando a superfície solar é ocultada (por exemplo, pela lua durante um eclipse solar total) [11]. Além da dificuldade de observação, muitos processos físicos que dão origem a muitos dos fenômenos geofísicos, coletivamente chamados de clima espacial, que podem em casos extremos, danificar satélites na órbita da Terra, causar falhas na distribuição de energia ou até prejudicar astronautas [60].

A geração atual de naves espaciais que observam o Sol gera um rico e complexo conjunto de observações, que fornece à comunidade científica medições com resolução espacial e temporal sem precedentes e diversidade espectral. Assim, novos métodos de processamento de sinal são necessários para tirar o máximo proveito de todas as informações disponíveis para, finalmente, abordar questões astrofísicas estelares abertas [22].

2.4.1 Características e fenômenos coronais

É habitual subdividir a coroa solar em três zonas, que variam de tamanho durante o ciclo solar: (1) regiões ativas, (2) regiões de baixa atividade e (3) buraco coronal [61, 11].

- **Região ativa:** As regiões ativas na superfície solar abrigam a maior parte da atividade, mas representam apenas uma pequena fração da área total da superfície. As regiões ativas estão localizadas em áreas de fortes concentrações de campos magnéticos, visíveis como grupos de manchas solares em comprimentos de onda ópticos ou magnetogramas. Grupos de manchas solares geralmente exibem uma polaridade magnética principal fortemente concentrada, seguida por um grupo posterior mais fragmentado de polaridade oposta.
- **Região de baixa atividade:** Do termo em inglês *Quiet Sun*, que atualmente é considerado um nome equivocado, pois os processos dinâmicos nestas regiões variam de fenômenos em pequena escala, como eventos de aquecimento de rede, *nanoflares*, explosões solares, pontos brilhantes e jatos de raios X suaves a fenômenos em larga

escala, como *loops* transequatoriais ou arcos coronais.

- **Buraco coronal:** As zonas polares norte e sul do globo solar geralmente são mais escuras do que as zonas equatoriais durante os eclipses solares. Hoje, é bastante claro que essas zonas são dominadas por linhas de campo magnético abertas, que atuam como condutores eficientes para liberar o plasma aquecido da coroa para o vento solar, se houver fluxos cromosféricos nos pontos de apoio. Devido a esse mecanismo de transporte eficiente, os buracos coronais ficam vazios de plasma na maioria das vezes e, portanto, parecem muito mais escuros do que o sol silencioso, onde o plasma aquecido que flui da cromosfera permanece preso até que esfrie e precipite de volta à cromosfera.

Como nossa atmosfera terrestre exibe uma grande variedade de formas de nuvens, de grandes volumes como as nuvens cirros bem estruturadas, a coroa solar exibe uma mistura igualmente rica de morfologias de *loop*, que podem revelar pistas importantes sobre os processos subjacentes de reconexão e reconfiguração magnética [8, 11].

O Sol possui uma estrutura estratificada composta pelo núcleo, zona radiativa, zona convectiva, fotosfera, cromosfera, região de transição e coroa, como mostra a Fig. 2.16 [8, 11, 61].

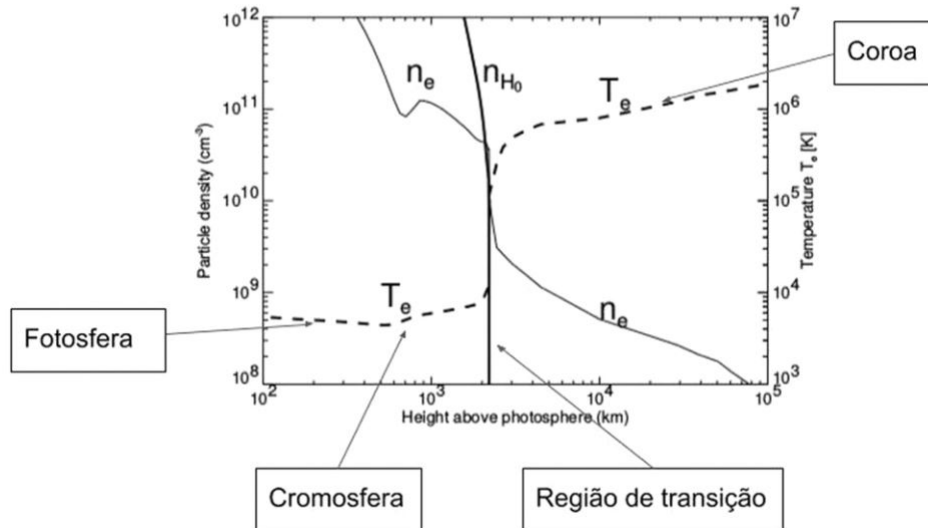


Figura 2.16. Densidade (linhas contínuas) e temperatura (linhas tracejadas) em diferentes camadas da atmosfera solar [8].

O fluxo dessa energia radiativa é emitido pela camada denominada fotosfera. A fotosfera é a camada visível do Sol, geralmente, chamada de superfície do Sol. Essa

camada apresenta uma região de temperatura mínima do Sol. A fotosfera apresenta estruturas nomeadas manchas solares e foram observadas por Galileu em 1610. Nessa camada é possível observar o topo das células da camada convectiva, os grânulos e os super grânulos [8, 11, 61].

Acima da fotosfera está a cromosfera. Nesta camada há um aumento na temperatura entre 10000 K e 20000 K. Esta camada é observada geralmente no comprimento de onda correspondente ao $H\alpha$ (656,28 nm) [8, 11, 61].

A região de transição é uma camada fina que separa a cromosfera e a coroa solar. Nesta região a temperatura cresce rapidamente até alcançar temperaturas de milhões de Kelvin [8, 11, 61].

E por fim, a coroa que é a camada mais externa da atmosfera solar e apresenta temperaturas entre 2 e 4 milhões de Kelvin. Geralmente esta camada é observada durante os eclipses ou usando um coronógrafo, dispositivo que esconde a fotosfera do Sol. Nesta região acontecem uma variedade de fenômenos, incluindo *Helmet streamers*, *plumes* nos polos do Sol e *loops* ou linhas de campo fechadas, linhas de campo aberto ou buracos coronais, como mostra a Fig. 2.17 [8, 11, 61].

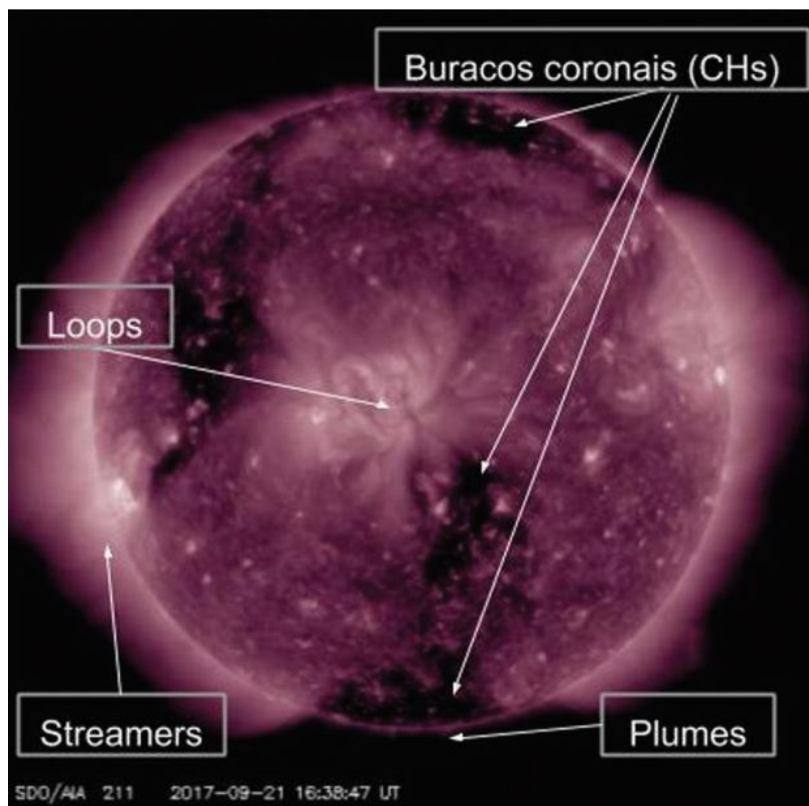


Figura 2.17. Fenômenos na coroa solar: Linhas de campo fechadas (*loops*), buracos coronais (CHs), *Helmet streamers*, *plumes* nos polos do Sol. Adaptado da imagem do instrumento AIA no comprimento de onda 21,1 nm, no dia 21 de setembro de 2017 [8].

Em geral, a coroa muda com o ciclo das manchas solares em outras palavras com a evolução do campo magnético ao longo do ciclo solar.

2.4.2 Descrição física da irradiância solar

A radiação solar é a principal fonte externa de calor para o sistema atmosférico / oceânico acoplado da Terra e as variações dessa energia ocorre em várias escalas de tempo [62].

A radiação solar é o fluxo de energia emitida pelo Sol e transmitida sob a forma de radiação eletromagnética. Durante muitos anos foi considerada uma constante, no entanto, desde a corrida espacial, observações contínuas demonstravam variações de poderiam ocorrer da escala de minutos a décadas de duração [8, 11, 61].

Para se determinar a medição de radiação são determinadas duas grandezas, a TSI- Irradiância solar total e SSI - Irradiância solar espectral, onde a obtenção desses valores, com precisão, são importantes para os modelos climáticos e atmosféricos. A TSI é definida como a potência total da energia proveniente do Sol por unidade de área a 1 UA e a SSI é o fluxo dado em função da variação do tempo e do comprimento de onda [62, 8, 11].

Para se obter o valor TSI, utiliza-se a Lei de Stefan-Boltzmann, como mostra a Eq. 2.30, onde se considera o Sol como um corpo negro

$$P = \sigma T^4 A, \quad (2.30)$$

em que P corresponde a TSI, $T = 5800K$ é a temperatura aproximada do Sol, considerando o raio solar $R_{\odot} = 6,9 \times 10^8$ m e um raio de superfície de 1UA, $P \sim 1387,6 \text{ Wm}^{-2}$ [8, 10]. A irradiância calculada depende tanto da área coberta por um determinado tipo de característica quanto da localização espacial no disco solar. No período antes da disponibilização dos magnetogramas, uma versão simplificada do modelo teve que ser empregada. Neste modelo, é assumida uma distribuição homogênea de recursos magnéticos sobre a superfície solar, de modo que apenas a área fracionária do disco solar coberta por cada um deles (fator de enchimento global ou médio do disco, α) e o fluxo específico, F , (isto é, o fluxo que seria emitido se todo o disco solar fosse coberto por esse tipo de recurso) de cada recurso é necessário. A evolução do fluxo radiativo em um dado comprimento de onda, λ (SSI), pode ser calculada como mostra a Eq. 2.31

$$F(\lambda, t) = F_q(\lambda) + \alpha_u(t)\Delta F_u(\lambda) + \alpha_p(t)\Delta F_p(\lambda) + \alpha_f(t)\Delta F_f(\lambda) + \alpha_n(t)F_n(\lambda), \quad (2.31)$$

em que F_q, F_u, F_p, F_f e F_n são os fluxos radiativos independentes do tempo do modelo de cinco componentes: *Quiet Sun* (q), mancha solar umbra (u), mancha solar penumbra (p), *faculae* (f) e *network* (n) [62].

Existem mecanismos propostos para explicar a origem e as variações da irradiância solar, porém o mais aceito está relacionado a fenômenos que magnéticos da superfície solar [63], como mostra a Fig. 2.18.

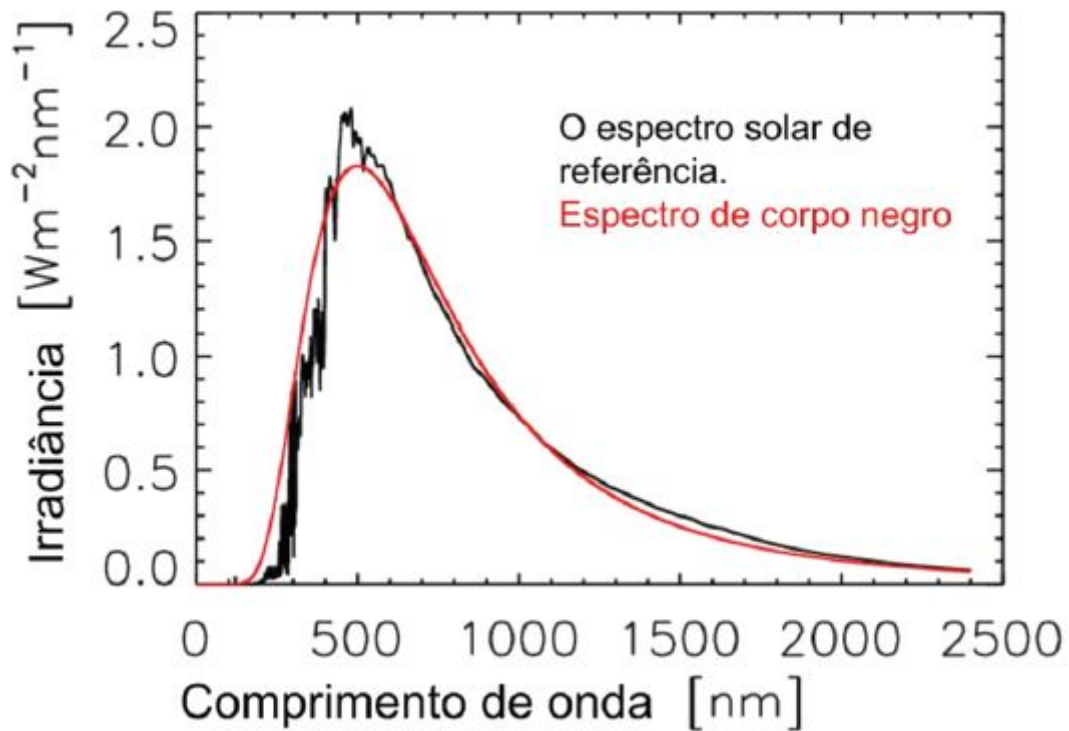


Figura 2.18. O espectro solar de referência em condições de baixa atividade solar (linha preta ou linha que apresenta variações) [9] e o espectro solar como se o Sol fosse um corpo negro com uma temperatura de ~ 5800 K (linha vermelha ou contínua), adaptado de [10, 8].

Conforme mostra a Fig. 2.16, a temperatura na atmosfera solar varia em função da altitude, sendo na fotosfera e na cromosfera na ordem de 10^3 K e aumentando abruptamente na região de transição, chegando a ordem de 10^6 K na coroa. Isso faz com que regiões na cromosfera e a região de transição emitam no ultravioleta (UV) e no extremo ultravioleta (EUV), já na coroa apresenta emissão EUV e raios X. A fotosfera apresenta temperaturas menores e emite na faixa do visível. A SSI e TSI têm sido medidas desde 1978 usando diferentes instrumentos no espaço, mas estas medidas apresentam discre-

pâncias. As medidas da irradiância solar em longas escalas de tempo são importantes para entender sua influência no clima da Terra, para isto são necessários modelos que permitam reconstruir séries temporais de irradiância total e espectral [8, 11].

2.4.3 Missões de observação solar

A história sobre missões dedicadas a observação solar não é muito longa, devido à limitação dos métodos terrestres e as poucas missões espaciais dedicadas a este tipo de observação. As primeiras naves espaciais de observação solar enviadas foram *Helios 1* e *Helios 2* (1974 - 1980) a uma distância de 0,3 UA para o Sol [21]. A primeira missão espacial dedicada a energia solar que operou um ciclo solar completo foi a *Solar Maximum Mission* (SMM), lançada em 14 de fevereiro de 1980 e durando até a deterioração da órbita em 2 de dezembro de 1989, como mostra na Fig. 2.19 [11].

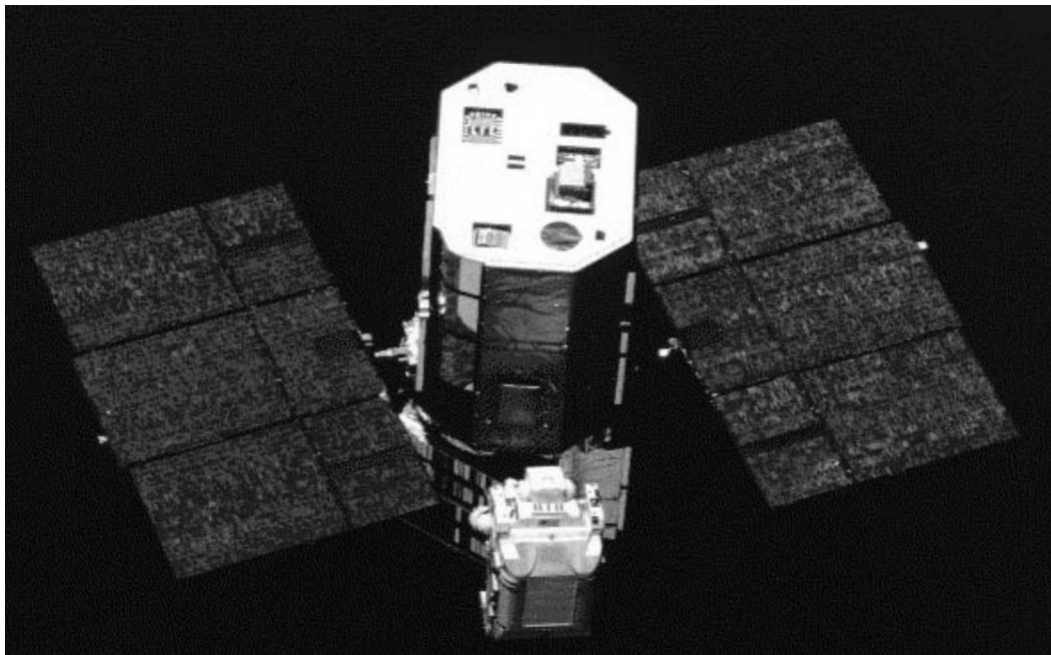


Figura 2.19. O satélite SMM foi operado durante 1980-1989. Algumas falhas do instrumento ocorreram no início da missão, como o codificador de posição do *FCS* e vários giroscópios. Os reparos do satélite foram realizados por “Pinky” Nelson e Dick Scobee, do *Space Shuttle Challenger*, em abril de 1984. A abordagem do astronauta em sua poltrona voadora na espaçonave doente está documentada nesta figura [11].

A SMM fez várias descobertas científicas ao observar cerca de 12.000 explosões solares e várias centenas de ejeções de massa coronal - CME [64]. Houve uma missão japonesa similar, *Hinotori*, entre 21 de fevereiro de 1981 e 11 de outubro de 1982 [65].

Ao longo dos anos, com o progresso do entendimento físico e dinâmica solar, os

satélites foram estudando cada vez mais fenômenos solares e aprimorando cada missão, principalmente quando se fala da observação em raios X e raios γ . Outra grande missão de destaque foi a sonda espacial Observatório Solar e Heliosférico - SoHO, realizada pela Agência Espacial Europeia (ESA) e a Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço (NASA). Esta sonda foi lançada em 2 de dezembro de 1995 e tem previsão de operação até o final de 2020, podendo ser estendida até 2022 [66, 11].

A sonda SoHO inclui os seguintes 12 pacotes de instrumentos: 3 instrumentos para helioseismologia (GOLF, VIRGO, SOI / MDI), 5 instrumentos para observar a atmosfera solar (SUMER, CDS, EIT, UVCS, LASCO) e 4 instrumentos detectores de partículas que monitoram o vento solar (CELIAS, COSTEP, ERNE, CISNE), como mostra a Fig. 2.20. O coronho de luz branca da LASCO a bordo do SOHO foi especialmente projetado para detectar e rastrear CMEs. Um método de inversão tomográfica foi desenvolvido para inverter a distribuição integrada da densidade de elétrons da linha de visão 2D na coroa solar de uma única espaçonave (LASCO-C2), usando restrições adicionais de simetria esférica ou axial. Outro método tomográfico foi desenvolvido para reconstruir a distribuição de densidade 3D a partir da combinação de imagens de intensidade e brilho polarizado do LASCO [21].

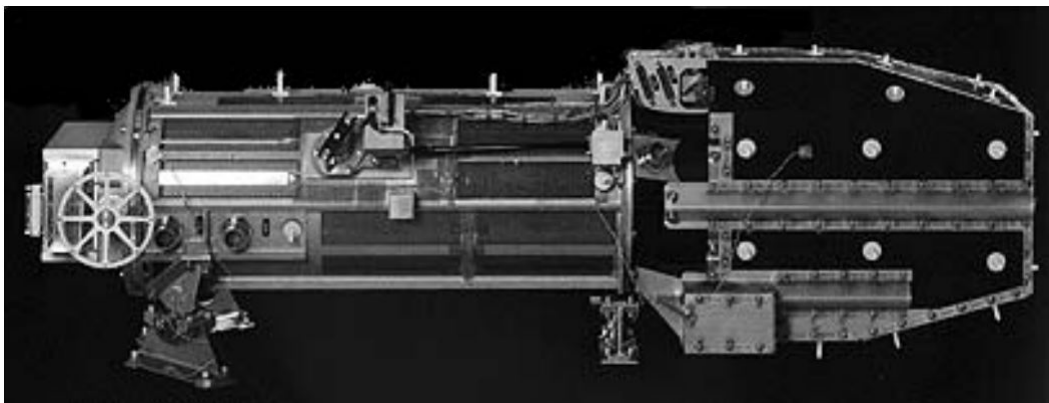


Figura 2.20. O Telescópio de Imagens Ultravioleta Extrema (EIT) a bordo do Observatório Solar e Heliosférico (SoHO) é um telescópio multicamada de incidência normal. Ele grava desde 1996 imagens solares em disco inteiro em vários filtros, sensíveis a temperaturas coronais de 1 a 2 MK, com uma resolução espacial de 2,5 e uma cadência de algumas horas (cortesia da equipe do EIT) [11].

Até o ano de 2011, a principal fonte de dados para a literatura sobre observação solar era a missão Observatório Solar de Relações Terrestres - STEREO. Foram enviadas duas sondas espaciais que se separaram e entraram em órbitas heliosféricas em direções opostas, STEREO-A (à frente) liderando na direção leste e STEREO-B (atrás) seguindo na direção oeste ao redor do Sol, aumentando sua separação em $\approx 45^\circ$ por ano, mas mantendo suas distância média de $1,0 \pm 0,1$ AU do Sol o tempo todo, como mostra a

Fig. 2.21. Essas órbitas específicas fornecem dados solares adequados para estereoscopia de ângulo pequeno no início da missão (ou sempre que o ângulo de separação é próximo de zero ou 180 graus), enquanto a estereoscopia e tomografia de ângulo grande são possíveis nos anos posteriores. A taxa de dados é mais alta no início da missão, mas diminui continuamente devido à menor taxa de telemetria mais tarde na missão. [12].

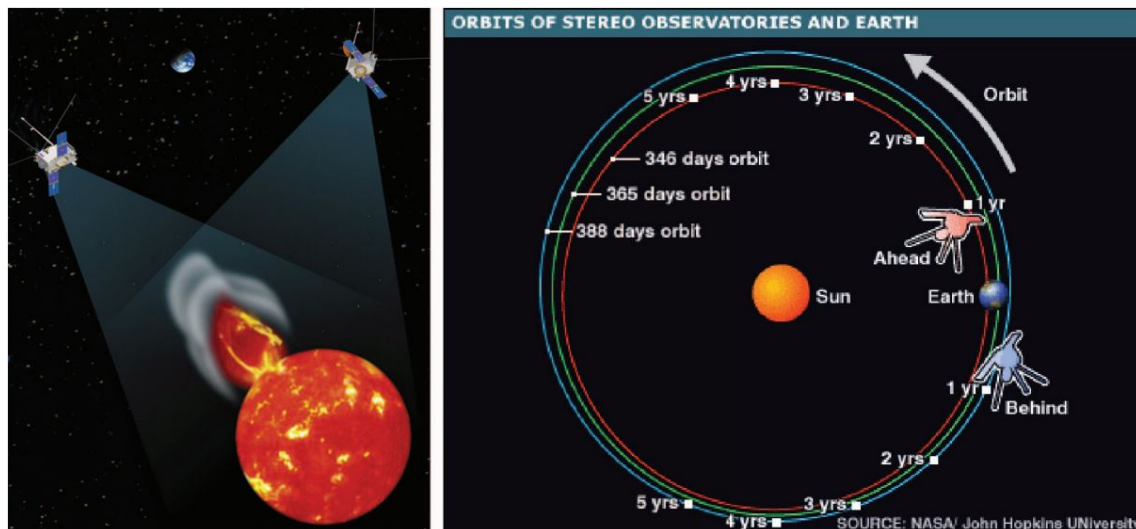


Figura 2.21. Esquerda: Conceito da perspectiva 3D da nave espacial STEREO em uma ejeção de massa coronal lançada do Sol. Direita: Órbitas do STEREO-A (vermelho) e STEREO-B (azul) em relação à órbita anual da Terra (verde) (crédito: NASA) [12].

Enquanto isso em fevereiro de 2010, foi lançada a missão Observatório de Dinâmica Solar - SDO, como mostra a Fig. 2.22, que é descrita como “nosso Hubble no Sol”, que fornece informações de contexto valiosas ao STEREO com imagens de alta resolução sem precedentes em EUV, raios X suaves e comprimentos de onda da luz branca. Especialmente a combinação de STEREO / EUVI-A, EUVI-B e o Atmospheric Imaging Assembly AIA / SDO configura um poderoso sistema de ponto de vista triplo para melhorar a estereoscopia e a tomografia [21, 13]. Existem outras missões ativas e futuras para que se mantenha essa configuração de sistema em ativa [67].

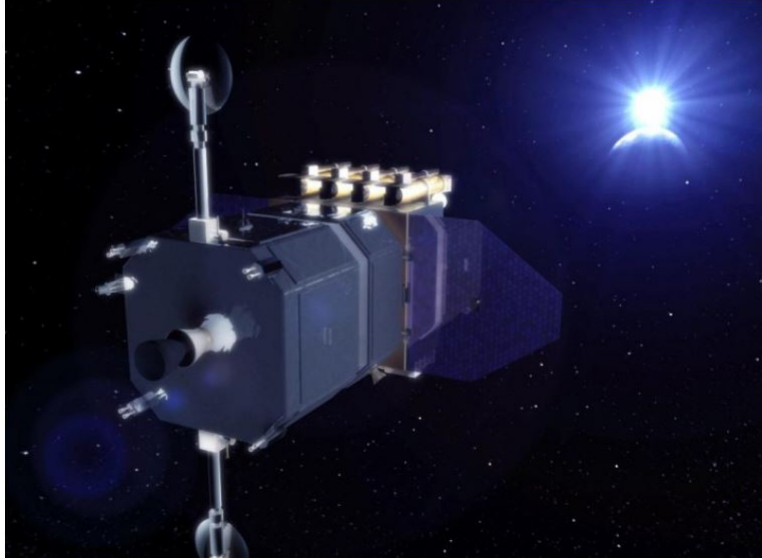


Figura 2.22. Conceito artístico do SDO em órbita [13].

A Tabela 2.1 apresenta um resumo das missões, em ordem cronológica, descritos nesta seção.

Tabela 2.1. Missões solares.

Missões	Início	Fim
Helio 1 e 2	1974	1980
SMM	1980	1989
SoHO	1995	2020 ¹
STEREO	2006	2016
SDO	2010	2020 ¹

A missão de enfoque deste trabalho será a SoHO, devido ao fácil acesso do banco de dados disponível pela NASA.

2.4.4 Sistema de coordenadas para dados de imagens solares

A pesquisa solar está se tornando cada vez mais sofisticada. Os avanços na instrumentação solar levaram a aumentos na resolução espacial e continuarão a fazê-lo. As futuras missões espaciais verão o Sol sob perspectivas diferentes da visão atual de observatórios terrestres ou satélites na órbita da Terra. Ambos os avanços exigirão uma atenção mais cuidadosa aos sistemas de coordenadas usados para dados de imagens solares. De fato, alguma amostra disso já ocorreu com o satélite SoHO, que vê o Sol a partir do ponto

¹É somente uma previsão, podendo ser estendida.

interno de Lagrange entre a Terra e o Sol. O Sol parece aproximadamente 1% maior do SoHO do que da Terra, exigindo ajustes sempre que as imagens do SoHO são comparadas com dados de observatórios terrestres ou satélites em órbita baixa da Terra [68, 69].

O Sistema de Coordenadas Mundiais (WCS) é um padrão para incorporar informações de coordenadas em um cabeçalho do Sistema de Transporte de Imagem Flexível (FITS). Seu primeiro uso extensivo na física solar é pelo conjunto de telescópios Investigação Coronal e Heliosférica das Conexões Terra-Sol (SECCHI) a bordo do STEREO. O formalismo do WCS auxilia na análise de dados SECCHI de várias maneiras, como o esférico, nos quais os efeitos associados aos campos de visão extremamente amplos dos telescópios *Heliospheric Imager* (HI) podem ser manipulados de uma maneira completamente inequívoca e padrão. De particular importância é que as palavras-chave posicionais do WCS permitem que informações sobre efemérides da espaçonave sejam incorporadas ao cabeçalho do FITS sem depender das palavras-chave específicas da missão [70].

Existem várias formas de realizar este tipo de correção, a mais comum é utilizando a linguagem *IDL* [71], mas também já existe esse tipo de análise em Python com a biblioteca *SunPy*. Por fugir do escopo deste trabalho, não será realizado esta correção.

2.4.5 Modelo de reconstrução da irradiância solar

A relação física entre a intensidade de luz observada remotamente polarizada e a densidade de elétrons livres no coroa integrada ao longo da linha de visão de medição (LOS) é dado pela Eq. 2.32 [22, 31, 32, 72]

$$y_t(\theta_t, s) = C \int_{\mathcal{L}} dl H(s, s + l\theta_t) + \nu_t(\theta_t, s), \quad (2.32)$$

em que a função $y_t(\theta_t, s)$ é a luz polarizada (pB) medida em um tempo t a partir dos ponto de visada (POV) definido por θ_t . O escalar C é uma combinação de vários fatores físicos constantes necessárias para equilibrar as unidades físicas da equação. A física de espalhamento Thomson está encapsulada no conhecido função $H(s, s + l\theta_t)$ e a função $\nu_t(\theta_t, s)$ é o ruído de medição dependente do instrumento, podendo este ser modelado com a distribuição de Poisson.

As estatísticas do ruído de medição $\nu_t(\theta_t, s)$ são de Poisson, uma vez que a dispersão governa a emissão de luz pB da coroa e os sensores de luz são, na maioria das vezes, CCDs. Na prática, as estatísticas reais do ruído de medição podem ser especificadas apenas com rigor, uma vez que os *coronagraphs* são instrumentos ópticos muito complicados e vários artefatos sistemáticos podem persistir mesmo após a calibração. Frequentemente, apenas

a variação do ruído para cada pixel é conhecida [22]. Sob essas condições, não está claro se haverá fótons suficientes por pixel para iluminar o detector e se a relação sinal-ruído (SNR) será suficiente. Portanto, é necessário quantificar o nível esperado de SNR e, mais geralmente, fornecer ferramentas para extrair informações de escalas de subpixel, onde se considerar a emissão da coroa solar uniforme em todo o Sol, teríamos um processo de Poisson homogêneo, caso contrário, considera-se o fluxo de fótons que atinge o detector em um local específico durante um tempo de exposição, tornado um processo de Poisson não-homogêneo [73].

As medições de pB são tipicamente na forma de imagens. Cada pixel de tal imagem é a intensidade da luz polarizada focada em um sensor, geralmente uma célula de uma câmera CCD. Mais tarde será conveniente representar essa imagem pelo vetor y_t , com cada um dos seus elementos M iguais a uma intensidade de pixel único da imagem pB. O vetor está relacionado ao modelo de avanço contínuo (Eq. 2.32) através da Eq. 2.33

$$(y_t)_m = \int_{S_m} ds y_t(\theta_t, s), \quad (2.33)$$

em que $(\bullet)_m$ é o m -ésimo elemento do argumento do vetor e S_m é o conjunto de linhas de visão focadas no m -ésimo pixel da imagem.

Soluções analíticas de forma fechada para equações integrais de Fredholm como na Eq.2.32, as quais são possíveis somente quando o núcleo é de uma forma simples. No entanto, o núcleo de dispersão Thomson na Eq. 2.32 é muito complicado e o modelo avançado deve ser discretizado para aproximar a solução por meio de técnicas numéricas, como mostra a Eq. 2.34.

$$x_t(r) = \sum_{n=1}^N (x_t)_n \phi_n(r), \quad (2.34)$$

em que r é a posição do vetor, N é o número total de bases e $\phi_n(\bullet)$ é a n -ésima função de base. A escolha das funções básicas tem um impacto significativo no as reconstruções como todos os recursos na atmosfera solar que não pode ser expresso como uma combinação linear de funções básicas são perdidas. Em qualquer caso, é possível determinar sistematicamente o número de elementos básicos necessários por meio da seleção da ordem do modelo ou como um hiperparâmetro no processo de estimativa, mas com uma despesa computacional potencialmente grande [74, 75]. Assim a Eq. 2.32 pode ser reduzido a um sistema linear $Ax = b$, onde a matriz de medidas é representada pela Eq. 2.34, com dependência espacial e a soma ponderada das integrais de linhas da emissão de raios solares [22].

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção será detalhado o algoritmo de reconstrução desenvolvido, calculado antes do procedimento de otimização para reconstrução, as medições correspondentes a uma ou mais versões filtradas da imagem esparsa com gradiente desejada. Para tal, será feito 3 esquemas de reconstrução, sendo um artificial, onde a A é decorrente da transformada de Fourier, outro simulando diferentes números de projeções das linhas de emissão de raios solares e com a Transformada de Radon.

3.1 Visão Geral

A Fig. 3.1 apresenta, de maneira geral, um diagrama com metodologia utilizada para a realização deste trabalho. São considerados dois casos de estudo, um onde o vetor de medidas b é estimado diretamente no domínio de Fourier, sendo este artificial e o outro estima as medidas no domínio de Fourier a partir da transformada de Radon, sendo este, correspondente com a natureza do problema de tomografia solar.

É utilizado para cada caso, um conjunto de filtros lineares, a fim de esparsificar a imagem, inicializando a reconstrução, para cada filtro aplicado, utilizando a teoria do CS, como descrito na Seção 2.2.

Após finalizado a solução numérica, a imagem passa por um processo de composição espectral, considerando tanto a resposta de cada filtro linear utilizado, quanto os valores captados de b , assim finalizando o processo de reconstrução da imagem.

Cada um destes processos serão discutidos e detalhados neste capítulo, ao final apresentando o algoritmo proposto por este trabalho.

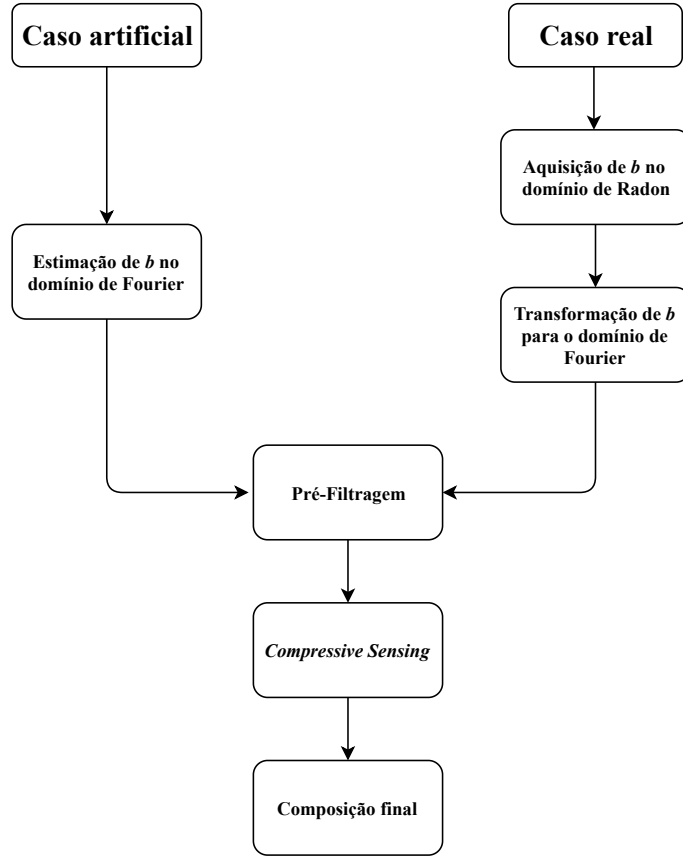


Figura 3.1. Visão geral da metodologia utilizada, em que apresenta os dois casos de utilizados para a realização do trabalho proposto.

3.2 Estimação de medidas no domínio de Fourier a partir da Transformada de Radon

Devido ao teorema de cortes de Fourier ou Teorema de projeções [76], o domínio bidimensional de Radon no espaço de Fourier é definido como

$$\hat{f}(L, \theta) = \int_{\mathbb{R}} Rf(p, \phi) e^{-2\pi j p L} dp = \widehat{Rf}(L, \phi), \quad (3.1)$$

em que $\theta = (\cos\phi, \sin\phi)^T$ (Seção 2.1.3). Se utilizando da Eq. 3.1, devido à dificuldade de modelagem da função $H(s, s + l\theta_t)$, descrita na Seção 2.4.5, a modelagem é baseada a partir da transformada de Radon, onde as medidas de irradiância solar são captadas no domínio de Radon e transformadas para o domínio de Fourier. Sendo uma representação de Fourier, sua discretização é dada pela Eq. 3.2

$$\hat{f}(L, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} Rf(p, \phi) e^{-2\pi j p n} = \widehat{Rf}(L, \phi). \quad (3.2)$$

Como consequência a Eq. 3.2 é definida para as n projeções captadas. Para que o erro de truncamento associado à discretização seja reduzido, é realizado um processo de interpolação das medidas no domínio de Fourier.

3.3 Procedimento de otimização para reconstrução

Como descrito na seção 2.4.5, as funções de base da discretização da matriz de medidas do sistema, impacta na reconstrução da imagem. Esta matriz possui tanta dependência do equipamento utilizado para a maneira de obtenção de b . Desta forma foi realizado duas maneiras para a escolha do vetor de medidas:

- **Fourier:** Em situações como a tomografia de difração, as medidas são mais naturalmente expressas no domínio de Fourier e a comparação entre o algoritmo de retropropagação de Devaney e a reconstrução direta de Fourier revela melhorias ainda maiores na eficiência computacional do método de Fourier [77].

A aplicação é possível considerando que medições geralmente envolvem amostras tomadas em trajetórias específicas nos domínios de frequência das imagens, ou espaços, para que a reconstrução corresponda às imagens computacionais com base em suas transformadas de Fourier subamostradas [14, 78]. A aplicação dos métodos de reconstrução da transformada de Fourier é limitada pela dificuldade percebida de interpolação da grade polar ou outra medida para a grade cartesiana necessária para o cálculo eficiente da transformada de Fourier [77]. Por não corresponder à realidade do tema proposto, os resultados apresentados por esta metodologia serão artificiais. A Fig. 3.2 mostra a trajetória utilizada para esta reconstrução, sabendo que em técnicas de CS a trajetória também deve corresponder a um conjunto de coeficientes de frequência incoerentes em relação à transformação esparsificante [14].

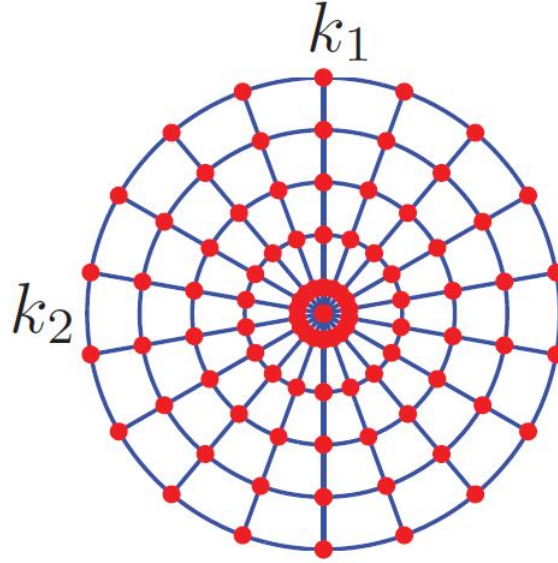


Figura 3.2. Linhas radiais de trajetória de amostras (os pontos vermelhos representam as medidas tomadas), adaptado [14].

- **Radon:** Utilizando-se do conceito descrito para o vetor com os coeficientes de Fourier, porém as linhas de trajetórias dos quais as amostras são adquiridas, vêm das projeções das linhas emitidas, sendo estas transformadas para o domínio de Fourier como nas trajetórias, assim como descrito nas seções 2.1.3 e 2.3.2. Desta maneira b e A possuem os requisitos descritos na seção 2.4.5 para a reconstrução de um caso real.

3.4 Pré-filtragem

Após o processo de calcular o procedimento de otimização para reconstrução (Seção 3.3), as medições correspondentes a projeções da imagem esparsa. Essas versões, ou combinações lineares delas, são reconstruídas e um estágio final compõe a imagem, analisando as imagens filtradas e as amostras originais obtidas pelas suas projeções. Em outras palavras, um conjunto de filtros lineares é indiretamente aplicado à imagem desejada, mas de maneira que as imagens filtradas reconstruídas forneçam as informações espectrais necessárias para obter a imagem não filtrada. A ideia fundamental é que os filtros usados sejam escolhidos de forma a aumentar a dispersão das imagens no domínio do pixel. Além disso, observe que, como essas amostras correspondem aos coeficientes de Fourier da imagem a serem reconstruídos, o cálculo das medições pré-processadas associadas às versões linearmente filtradas dessa imagem é simples. De fato, como mostra a Eq. 3.3, seja h o núcleo bidimensional de um dos filtros lineares invariáveis por deslocamento e seja a transformação de Fourier de h calculada com o mesmo número de *pixels* da imagem

a ser reconstruída. Se b é o vetor de amostras da imagem original e b_f é o conjunto de medidas para uma versão filtrada [14].

$$b_f = H_{k \in L} \circ b \quad (3.3)$$

Onde \circ representa o produto elemento a elemento e onde $H_{k \in L}$ é o vetor obtido empilhando todos os valores de H que pertencem à linha de trajetória L das amostras de projeção.

O filtros utilizados para a realização da pré-filtragem serão do conjunto de filtros na decomposição bidimensional de wavelets de Haar 2D (Seção 2.1.2), como mostra na Eq. 3.4, pois dependendo das configurações do sistema (valor de p e filtros usados), o tempo total de computação e a relação sinal-ruído - SNR são influenciadas [14],

$$h_1 = h_2^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad h_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

A Fig. 3.3, esquematiza o processo de pré-filtragem descrito nesta seção.

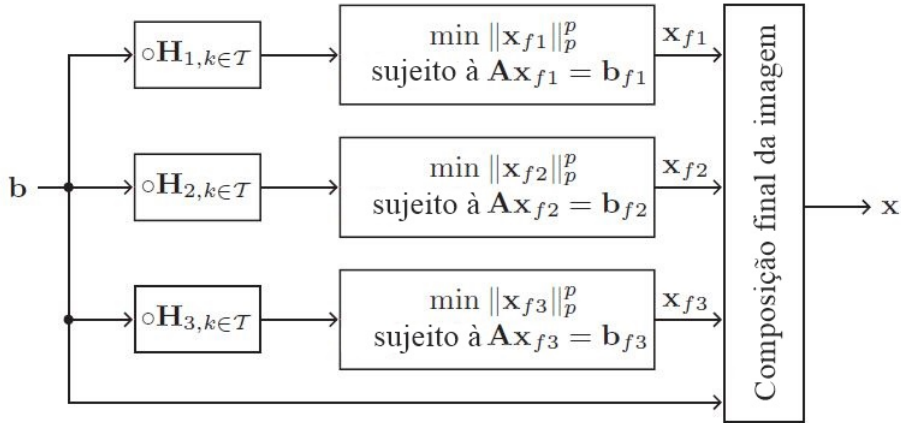


Figura 3.3. Pré-filtragem das medidas de entrada b e reconstrução separada de cada versão filtrada com as medidas b_{f1} , b_{f2} e b_{f3} , adaptado [14].

Para este trabalho, foi definido o valor de $p = 1$, por apresentar uma complexidade computacional menor em relação as p -normas, assim minimizando o tempo de processamento.

3.5 Algoritmo

Até esta seção foi apresentado toda a teoria e metodologia necessária para a solução do problema proposto. A partir de agora, será mostrado a otimização feita para o desenvolvimento do algoritmo de reconstrução. Para solucionar a Eq. 2.28 foi usado o método Mínimos quadrados com ponderação iterativa - IRLS, onde com a função objetivo modificada, cada função de iteração se aproxima a $\sum_{n=1}^N |x_n|^p$. A Eq. 3.5 apresenta o problema de otimização [79]

$$\hat{x}^* = \min_{\hat{x}} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n^{p-2} \hat{\mathbf{x}}_n^2 \quad \text{sujeito a } A\hat{T}^{-1}\hat{x} = b, \quad (3.5)$$

em que \mathbf{w}_n é um parâmetro de peso [80]. Observe que a Eq. 3.5 pode ser resolvido em apenas uma iteração, mas se o problema for resolvido repetidamente alterando os valores de \mathbf{w}_n a cada momento, para que \mathbf{w}_n se aproxime de $\hat{\mathbf{x}}_n$ a Eq. 3.5 se aproximará da Eq. 2.28, como mostra a Eq. 3.6 [79]

$$|\mathbf{w}^{(m)}| = |\hat{\mathbf{x}}^{(m-1)}|. \quad (3.6)$$

Como falado em [80, 79, 81], a fim de adicionar informações anteriores sobre a região de suporte da representação esparsa, se essa informação estiver disponível, é possível reduzir a quantidade de medições realizadas e ainda reconstruir sem ambiguidade o sinal subjacente. Como mostra a Eq. 3.7, seja ϕ o subconjunto de posições em $1, 2, \dots, N$ e pertencem à região de suporte de \hat{x} [79, 81]

$$\hat{x}_n \neq 0 \quad \forall \quad n \in \phi. \quad (3.7)$$

Assim as informações representadas pela Eq. 3.7 podem ser adicionadas ao procedimento de reconstrução (Eq. 2.28), como mostra a Eq. 3.8 [81]

$$\hat{x}^* = \min_{\hat{x}} \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin \phi}}^N |\hat{\mathbf{x}}_n| \quad \text{sujeito a } A\hat{T}^{-1}\hat{x} = b, \quad (3.8)$$

na qual \mathbf{w}_n seja suficientemente próximo de \hat{x}_n , a Eq. 3.7 também é verdade para o mesmo. Sendo isto verdade, como mostra a Eq. 3.9, \mathbf{w}_n é definido para $n \notin \phi$

$$\mathbf{w}_n = \begin{cases} |\hat{\mathbf{x}}_n^{(m-1)}|, & \text{se } n \notin \phi \\ \tau |\hat{\mathbf{x}}_n^{(m-1)}|, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.9)$$

Sendo necessário que τ seja muito pequeno para que a aproximação seja verdade. Desta formas as Eqs. 3.8 e 2.24 são reescritas como as Eq. 3.10 e 3.11, e considerando que $M = A\hat{T}^{-1}$

$$\hat{x}^* = \min_{\hat{x}} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n^{(m)} |^{(p-2)} \hat{\mathbf{x}}_n^2 \text{ sujeito a } A\hat{T}^{-1}\hat{x} = b, \quad (3.10)$$

$$\hat{x}^{(m)} = Q^{(m)} M^H (M Q^{(m)} M^H)^{-1} b. \quad (3.11)$$

Onde

$$Q = \text{diag}[q_1, q_2, \dots, q_N] \quad (3.12)$$

e

$$q_n = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_n^{(m-1)} |^{(2-p)}, & \text{se } n \notin \phi \\ \tau^{(2-p)} \hat{\mathbf{x}}_n^{(m-1)} |^{(2-p)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Devido a inversão presente na Eq. 3.11, a fim de garantir que sempre haja a inversão de matriz, é acrescido a $|\hat{\mathbf{x}}_n|$ uma constante μ . Assim a Eq. 3.13 é reescrita na Eq. 3.14

$$q_n = \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_n^{(m-1)} |^{(2-p)} + \mu, & \text{se } n \notin \phi \\ \tau^{(2-p)} \hat{\mathbf{x}}_n^{(m-1)} |^{(2-p)} + \mu, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.14)$$

Ao definir o critério de convergência para cada estágio de iteração, o procedimento iterativo com informações anteriores fornecidas pela Eq. 3.11 pode seguir a mesma estratégia proposta em [80]. Nesse esquema, a Eq. 3.11 é repetida, primeiro com $\mu = 1$ até

$$\frac{|\hat{\mathbf{x}}_n^{(m)} - \hat{\mathbf{x}}_n^{(m-1)}|}{1 + \|\hat{\mathbf{x}}_n^{(m-1)}\|} < \frac{\sqrt{\mu}}{100}. \quad (3.15)$$

Os valores de inicialização utilizados foram os mesmo apresentados em [79]. Esta

otimização é feita para cada estágio da pré-filtragem (Seção 3.4), onde também há a restrição para cada estágio um máximo de 100 iterações, e o algoritmo a um máximo de 10 estágios [14]. Também o ângulo de alcance utilizado será o de 180° por ser um ângulo de espaçamento ideal [6].

O estágio de composição da imagem mostrada na Fig. 3.3, visa obter a imagem desejada a partir do conjunto de imagens filtradas reconstruídas e as medidas originais em b . As imagens filtradas, correspondentes aos operadores de diferenças finitas aplicadas às linhas, colunas e diagonais de x , fornecem as informações de passa alta que complementam as informações espectrais originais em b . O nível DC de x , por exemplo, é perdido nas imagens filtradas, mas está disponível nas medições originais b . Nesta implementação, x é reconstruído primeiro no domínio da frequência, adotando as seguintes etapas: (1) Dividi-se os componentes de frequência de X_{f1} , X_{f2} e X_{f3} pelos filtros correspondentes H_1 , H_2 e H_3 (filtragem inversa). (2) Em seguida, combina-se os coeficientes de frequência resultantes de x dados pela filtragem inversa acima, com os das linhas de trajetória original. (3) Finalmente, a transformada de Fourier inversa dos coeficientes estimados de x é calculada, fornecendo a representação de x no domínio de pixel [14].

O Algoritmo 3.1 introduz o algoritmo de reconstrução desenvolvido.

Tabela 3.1. Algoritmo utilizado para a reconstrução das imagens a partir das medidas no domínio da frequência, com base nos métodos iterativo dos mínimos quadrados reponderados.

Algoritmo 1 Método IRLS para reconstrução de sinal no CS com informações a priori e metodologia de pré-filtragem

Entradas: $p > 0$, M , b , k .

Passo 1. A partir das linhas de emissão b , gere as linhas de trajetória no domínio de Fourier.

Passo 2. Com os filtros apresentados em (3.4), inicie o processo de pré-filtragem.

Passo 3. Para cada filtro, inicialize $\hat{x}^{(m)}$ e $Q^{(m)}$, utilizando a Eq. 3.11.

Passo 4. Faça o laço interno:

4.1 Inicialize $m := 1$.

4.2 Atualize $Q^{(m)}$ com (3.12) e (3.14).

4.3 Compute $\hat{x}^{(m)}$ usando (3.11).

4.4 Se (3.15) for satisfeita, vá para o Passo 5, senão $m := m + 1$ e volte ao Passo 4.2.

Passo 5. Para cada filtro, atualizar o parâmetro de regularização $\mu := \mu/10$.

Passo 6. Para cada filtro, se $\mu < \text{tol}$ termine, senão retorne para o Passo 4.

Passo 7. Realize o processo de composição da imagem.

Retorna: Imagem reconstruída x .

3.6 Imagem-teste

Para testar o Algoritmo 3.1, a Fig. 3.4 foi-se utilizada uma imagem LASCO-C2 (possui uma resolução de 23,8 arcsec/pixel, CCDs de 1024x1024 e banda de passagem no comprimento do laranja), da missão SoHO, da coroa solar em 23 de dezembro de 1996 às 04:44 UT, mostrando a faixa de serpentina interna ao longo do equador do Sol, onde o vento solar de baixa latitude se origina e é acelerado. Sobre as regiões polares, vemos as plumas polares até a borda do campo de visão. O campo de visão deste parágrafo abrange 8,4 milhões de quilômetros da heliosfera interna. O quadro foi selecionado para mostrar o cometa SOHO-6, um dos sete *sungrazers* descobertos até agora pela LASCO, quando sua cabeça entra na região eólica solar equatorial. Eventualmente, mergulhou no sol. [72, 15].

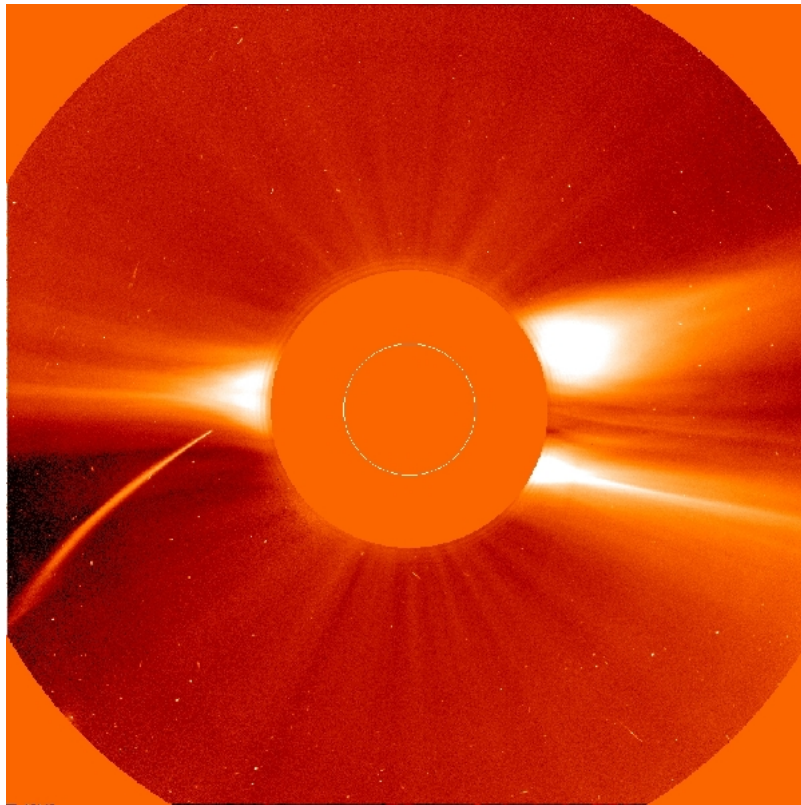


Figura 3.4. Imagem LASCO C2 da coroa solar, da missão SoHO, da coroa solar em 23 de dezembro de 1996 às 04:44 UT [15].

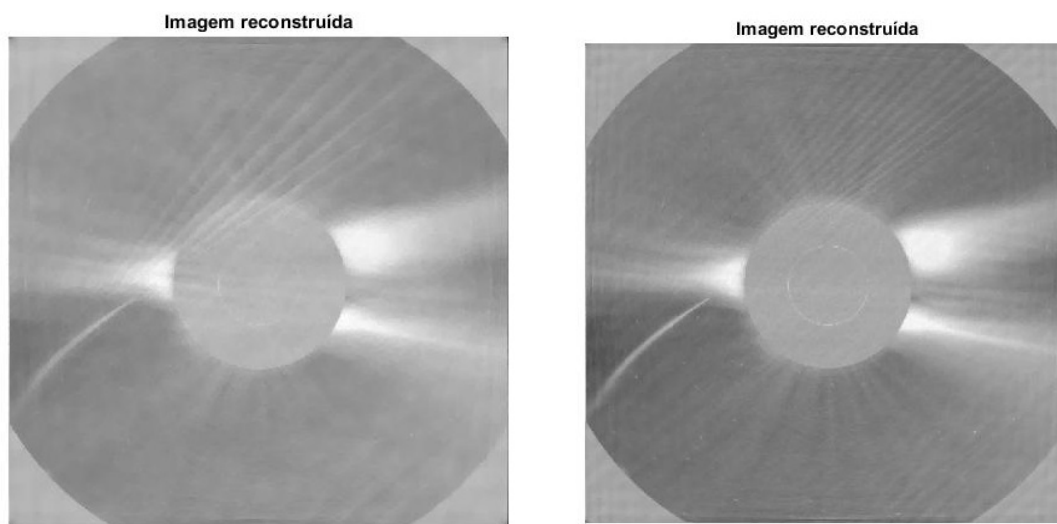
Para os redução de esforço computacional, a Fig. 3.4 foi processada em tons de cinza.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Assim como descrito na Seção 3.3, serão apresentados dois formatos de resultados. Primeiramente foi realizado os testes com diferentes números de projeções para a transformada de Radon (Seção 2.1.3), utilizando o Algoritmo 3.1. Após realizado este procedimento, foram escolhidos o melhor e o pior caso e comparados com o procedimento dos coeficientes de Fourier em trajetória (Seção 3.3) e a Retroprojeção Filtrada (Seção 2.1.3).

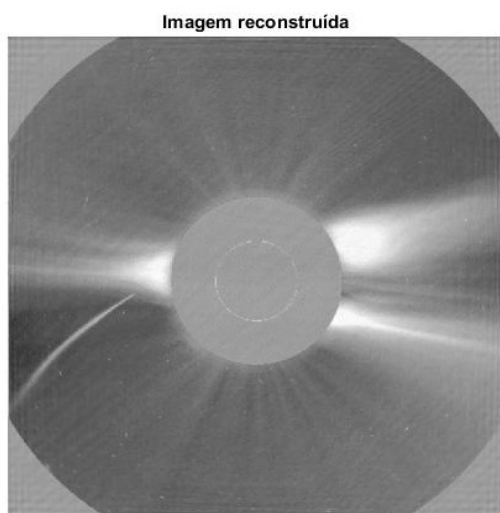
4.1 Algoritmo proposto

Foram realizadas simulações com diferentes número de projeção k (50, 100, 180, 200, 350 e 500) de 180° , onde no primeiro caso o valores de cada ângulo de projeção não eram interpolados e no segundo caso eram. A Fig. 4.1 apresenta as reconstruções, referentes a Fig. 3.4, para o primeiro caso.

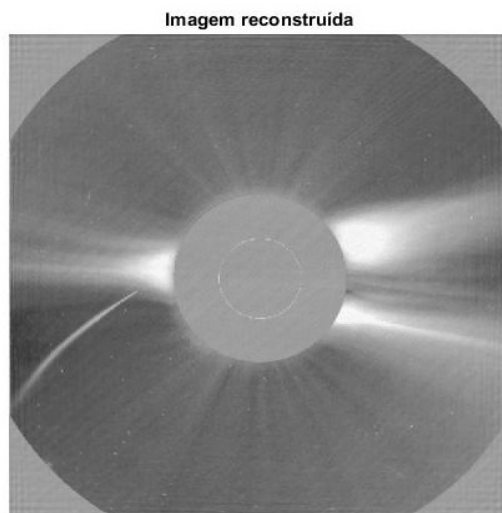


(a) Para k sendo 50.

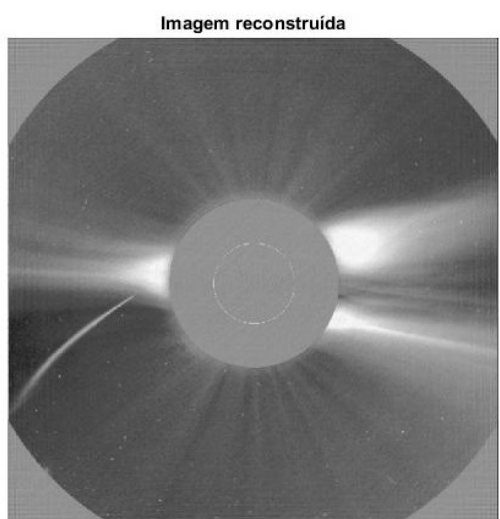
(b) Para k sendo 100.



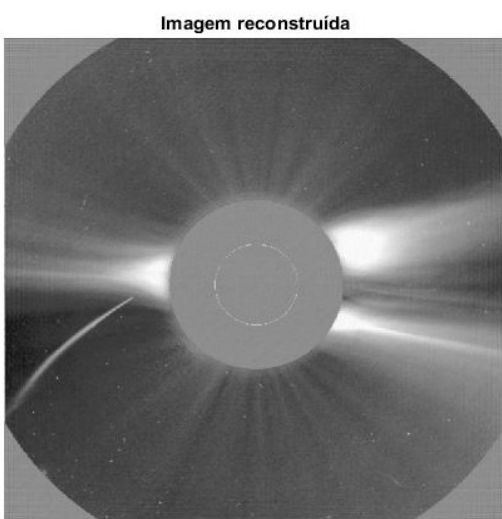
(c) Para k sendo 180.



(c) Para k sendo 200.



(c) Para k sendo 350.

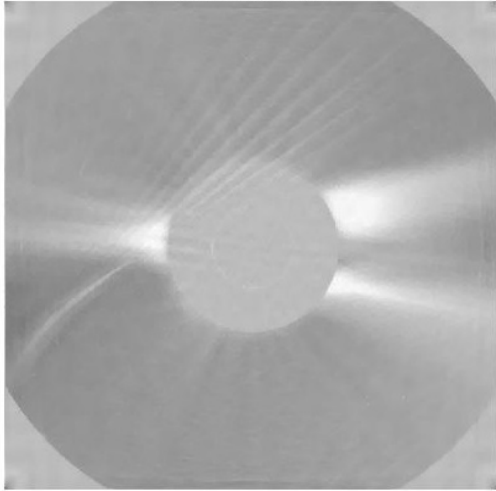


(c) Para k sendo 500.

Figura 4.1. Reconstrução sem linhas radiais interpoladas da imagem-teste para diferentes números de projeções com 180° de alcance.

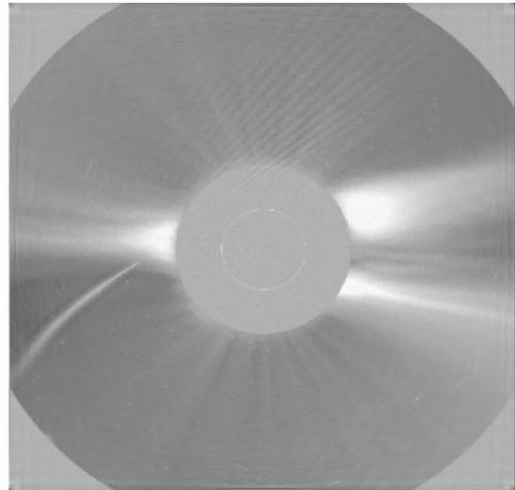
A Fig. 4.2 apresenta as reconstruções, referentes a Fig. 3.4, para o segundo caso.

Imagem reconstruída



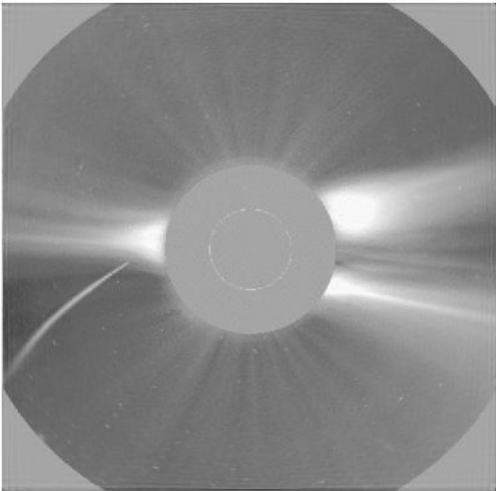
(a) Para k sendo 50.

Imagem reconstruída



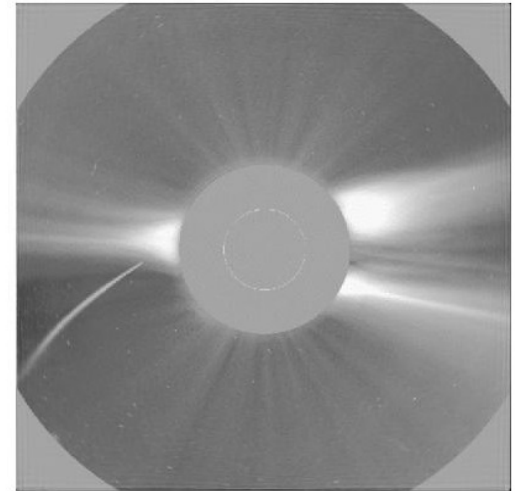
(b) Para k sendo 100.

Imagem reconstruída



(c) Para k sendo 180.

Imagem reconstruída



(d) Para k sendo 200.

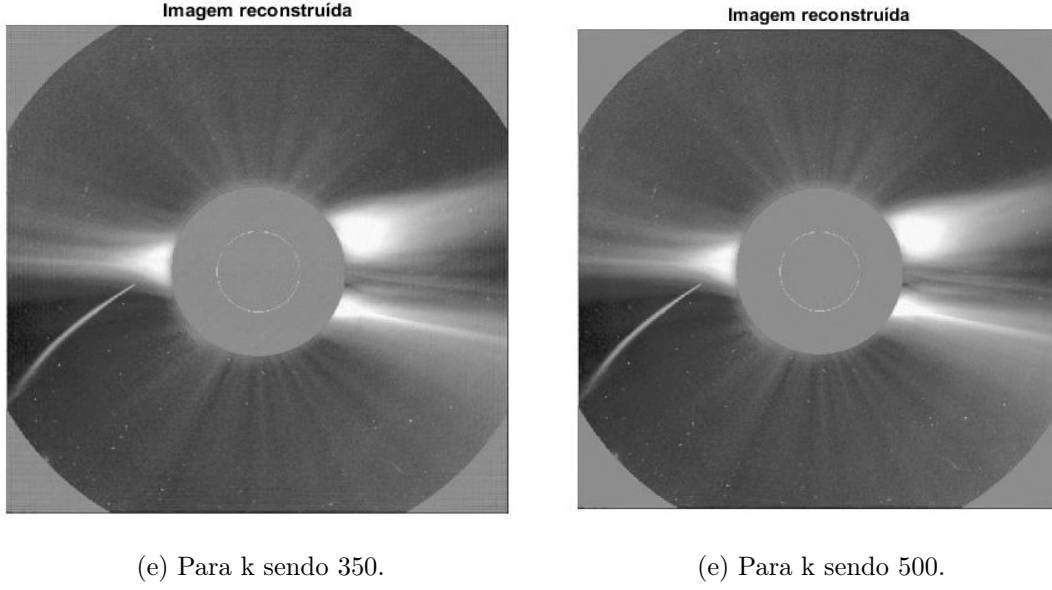


Figura 4.2. Reconstrução com linhas radiais interpoladas da imagem-teste para diferentes números de projeções com 180° de alcance.

Para cada resultado foi feita a análise de relação sinal-ruído (SNR), em decibéis, e Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) [82], em que é comparado a imagem reconstruída com a imagem original em tons de cinza (Fig. 3.4), sendo estes apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1. Análise de qualidade com base na relação sinal-ruído e na similaridade estrutural para a reconstrução da imagem com o algoritmo proposto.

	Número de projeções											
	50		100		180		200		350		500	
	SNR	SSIM	SNR	SSIM	SNR	SSIM	SNR	SSIM	SNR	SSIM	SNR	SSIM
1° caso	44.0	0.19	47.9	0.23	52.7	0.32	50.9	0.34	53.4	0.42	55.5	0.53
2° caso	45.7	0.16	48.9	0.24	51.5	0.33	52.0	0.35	54.8	0.44	57.0	0.56

Como mostra a Tabela 4.1 os resultados nos quais os valores de ângulos são interpolados apresentam uma melhor qualidade de imagem, tanto SNR como SSIM, porém com um custo computacional maior, devido a dificuldade percebida de interpolação da grade polar ou outra medida para a grade cartesiana necessária para o cálculo eficiente da transformada de Fourier, descrita na Seção 3.3. Desta maneira, para título de comparação, foi utilizados somente o segundo caso de teste.

4.2 Comparação

Para este caso foi feita a simulação com ângulo de 180° de alcance com o procedimento dos coeficientes de Fourier em trajetória e 50 e 500 projeções para a Retroprojeção Filtrada. A Fig. 4.3 apresenta a reconstrução para o procedimento dos coeficientes de Fourier em trajetória.

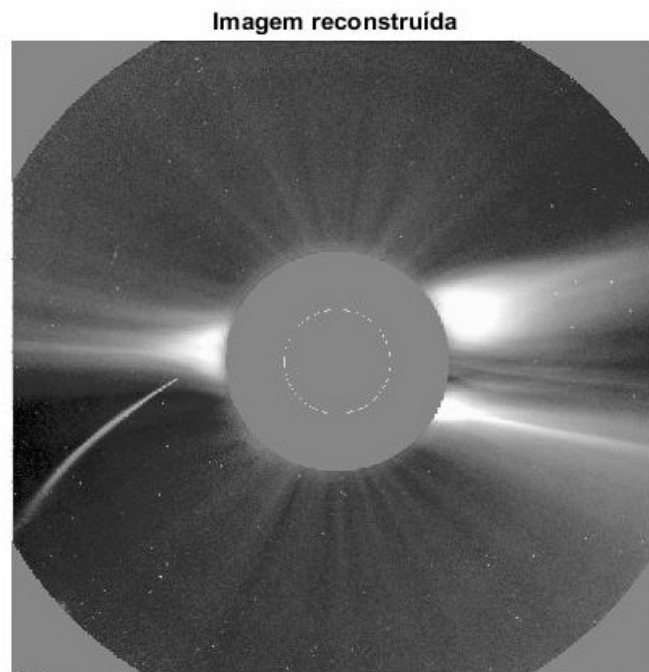


Figura 4.3. Reconstrução com o procedimento dos coeficientes de Fourier em trajetória radial.

A Fig. 4.4 apresenta as reconstruções para a Retroprojeção Filtrada, onde estas apresentam um ângulo de alcance de 180° .

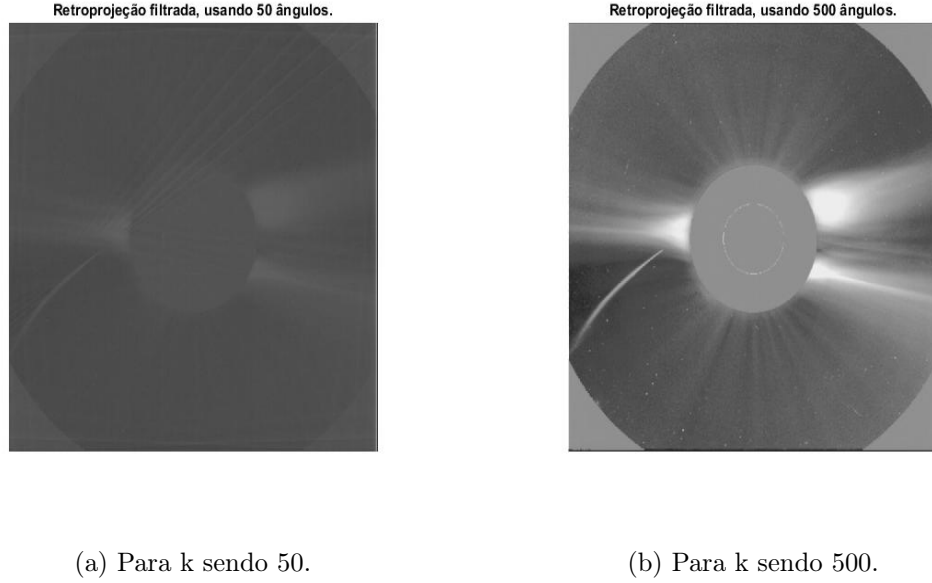


Figura 4.4. Reconstrução com a Retroprojeção Filtrada para diferentes números de projeções.

Para cada resultado foi feita a análise de relação sinal-ruído (SNR), em decibéis, e Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) [82], sendo estes apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2. Análise de qualidade com base na relação sinal-ruído e na similaridade estrutural entre a imagem reconstruída por retroprojeção filtrada e o caso ideal.

Coeficientes de Fourier		Retroprojeção Filtrada			
180°		50		500	
SNR	SSIM	SNR	SSIM	SNR	SSIM
62.2	0.41	1.84	0.07	37.1	0.16

Comparando os resultados da Tabelas 4.1 e 4.2, nota-se que o algoritmo proposto apresenta uma notória melhora na qualidade de imagem (SNR), porém tendo piorando em relação aos procedimento com os coeficientes de Fourier, o que de fato era o esperado por ser um caso artificial. Tendo em vista que tomógrafos de terceira geração conseguem capturar por volta de 1000 projeções [4, 21], também foi feita a simulação com a Retroprojeção filtrada com 1000 projeções, como mostra a Fig. 4.5.

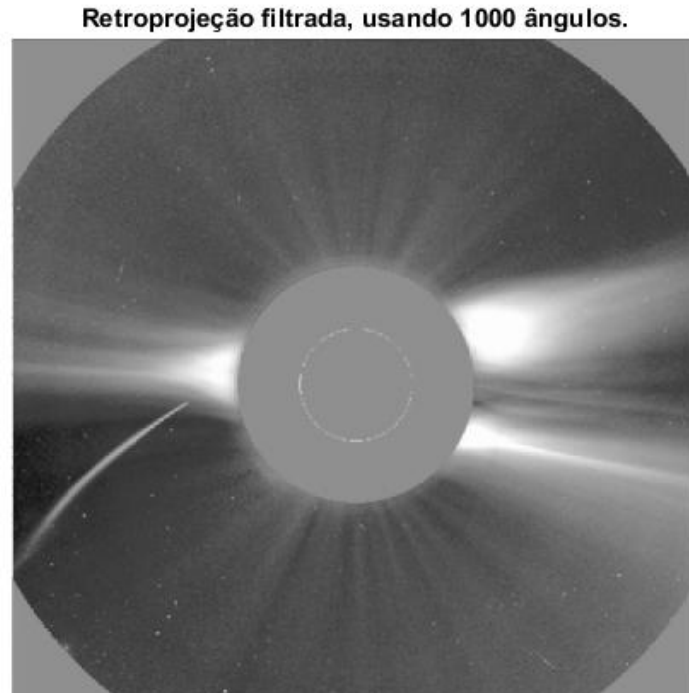


Figura 4.5. Reconstrução com a Retroprojeção Filtrada para número de projeção $k = 1000$.

Para este caso, a Tabela 4.3 apresenta a análise de qualidade de imagem para SNR e SSIM.

Tabela 4.3. Análise de qualidade com base na relação sinal-ruído e similaridade estrutural utilizando a retroprojeção filtrada com 1000 projeções.

Retroprojeção Filtrada com $k = 1000$	
SNR	SSIM
40.1	0.17

Como pode ser observado, mesmo o segundo caso com 500 projeções do algoritmo proposto a SNR possui uma qualidade superior ao com da Tabela 4.3.

Já se tratando da SSIM, o resultado comparando a Tabela 4.1 e a Tabela 4.2 mostra que houve um melhor resultado entre o método proposto e o método artificial. Por não ser um resultado esperado, necessita de uma análise estatística com mais dados para avaliação deste resultado.

5 TRABALHOS FUTUROS

Como possíveis trabalhos futuros, pode-se apontar:

- Utilizar a base de Shannon para a realização da pré-filtragem e comparar os resultados com a base de Haar, verificando e analisando o custo computacional e o comportamento das suas propriedades de localização de tempo-frequência.
- Estudo da função $H(s, s + l\theta_t)$, oriunda da física de espalhamento Thomson, para determinar a matriz de medidas e sua hermitiana, ambas necessárias para a aplicação do CS, comparando, se possível, esta análise com os resultados apresentados com o método deste trabalho.
- Analisar estatisticamente o método de avaliação de qualidade de imagem (SSIM) para o caso proposto neste trabalho. É importante definir as causas dos resultados apresentados para o caso artificial e o caso proposto por este trabalho.
- Analisar o comportamento do ruído e custo computacional necessário, para diferentes p-normas, para um caso de imagem tomográfica. Assim fazendo uma comparação de custo-benefício verificando a viabilidade de cada solução proposta.
- Analisar estatisticamente a qualidade de imagem para diferentes tipos de p-normas. Assim, proporcionando uma investigação aprofundada do comportamento da avaliação da qualidade de imagem para demais casos.
- Testar e adaptar, caso necessário, o algoritmo proposto para diferentes eventos solares. O sol possui vários ciclos, com períodos diferentes, com dimensões diferentes e diferentes origens, podendo introduzir o *Compressive Sensing* em outros contextos desta mesma temática.
- Testar e adaptar, caso necessário, o algoritmo proposto para diferentes eventos astronômicos, como a imagem do Buraco Negro M-87, revelada pela primeira vez no ano de 2019, a fim de se obter melhores resultados de qualidade de imagem.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho se propôs a introduzir a teoria de CS, que atualmente ainda é timidamente explorada na área de astronomia, possuindo um enorme potencial para o campo.

Para tal, o algoritmo de reconstrução, utilizou o conceito de pré-filtragem e composição espectral, trabalhando com duas situações: (1) Trabalhando com as medidas diretamente do domínio de Fourier, sendo este um caso artificial e (2) Transformando as medidas do domínio de Radon para o de Fourier, tanto pela dificuldade de modelagem da função $H(s, s + l\theta_t)$, quando a determinação de uma matriz hermitiana, necessária para a solução do CS. Este método garantiu a esparsificação da imagem e a reconstrução para o caso proposto.

Os resultados obtidos, primeiramente para o caso real, que como esperado, a qualidade de imagem SNR aumenta em até 20.7% e o SSIM é 64.15%, comparando o caso com menos projeções (50) com o de mais projeções (500), sendo este, para o caso onde os ângulos das linhas radiais não são interpolados. Já quando há a interpolação, o valor de SNR para a mesma comparação é 19,82% e o SSIM é 71,42%. Levando em consideração que em termos absolutos, o caso interpolado é melhor que o não-interpolado, como mostra na Tabela 4.1, apesar do aumento do custo computacional associado.

Já comparando os resultados da Tabela 4.1 com a Retroprojeção Filtrada e o caso artificial (Tabelas 4.2 e 4.3), conclui-se que os valores de SNR obtidos foram esperados, e que devido ao fato do caso dos coeficientes de Fourier ser artificial, a qualidade da imagem se apresenta com o melhor resultado. Já para os valores de SSIM, é necessário uma análise estatística para a definição do porquê o método proposto obteve um resultado melhor em comparação ao caso artificial. A retroprojeção filtrada mesmo com o dobro de projeções do melhor caso do método proposto, como esperado, obteve resultados de qualidade de imagem inferiores.

Desta forma, pode-se concluir que o presente trabalho mesmo com uma menor quantidade de projeções disponíveis, é possível a reconstrução com uma qualidade de imagem igual ou superior a técnicas já existentes.

Referências Bibliográficas

- [1] Hypheness. *Estas 20 imagens são as primeiras fotografias do mundo.* <https://www.hypeness.com.br/2017/04/estas-20-imagens-sao-as-primeiras-fotografias-do-mundo/>, 2017. data de acesso: 08/12/2019.
- [2] Françoise Launay. *The Astronomer Jules Janssen - A Globetrotter of Celestial Physics.* Springer, 2012.
- [3] L. Debnath e D. Bhatta. *Integral Transforms and Their Applications, Third Edition.* Taylor & Francis, 2014.
- [4] Avinash C. Kak e Malcolm Slaney. *Principles of computerized tomographic imaging.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2001.
- [5] L. B. Estácio. *Sobre a escolha da relaxação e ordenação das projeções no método de Kaczmarz com ênfase em implementações altamente paralelas e aplicações em reconstrução tomográfica.* PhD thesis, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP, 2014. Tese de mestrado.
- [6] Joseph M. Davila. *Solar Tomography.* *The Astrophysics Journal*, 423:871, Mar 1994.
- [7] E. Seeram. *Computed Tomography: Physical Principles, Clinical Applications, and Quality Control.* Elsevier Health Sciences, 2015.
- [8] Jenny Rodriguez, Franciele Carlesso, L.E. Vieira, e L. Silva. *A irradiância solar: conceitos básicos.* *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 40, Mar 2018.
- [9] A. Piel. *Plasma Physics: An Introduction to Laboratory, Space, and Fusion Plasmas.* Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [10] Kok Leng Yeo, Sami K. Solanki, Charlotte M. Norris, Benjamin Beeck, Yvonne C. Unruh, e Natalie A. Krivova. *Solar Irradiance Variability is Caused by the Magnetic Activity on the Solar Surface.* *Physical Review Letters*, 119(9), Sep 2017.

- [11] M. J. Aschwanden. *Physics of the Solar Corona. An Introduction*. Praxis Publishing Ltd, 2004.
- [12] M. L. Kaiser, T. A. Kucera, J. M. Davila, O. C. St. Cyr, M. Guhathakurta, e E. Christian. *The STEREO Mission: An Introduction*. *Space Science Reviews*, 136(1):5–16, Apr 2008.
- [13] J. A. Ruffa, M. Bay, D. K. Ward, P. J. Gonzales, L. M. Bartusek, e W. D. Pesnell. *NASA’s Solar Dynamics Observatory (SDO): A systems approach to a complex mission*. In *2012 IEEE Aerospace Conference*, pages 1–12, Mar 2012.
- [14] Cristiano Miosso, R von Borries, e J.H. Pierluissi. *Compressive sensing method for improved reconstruction of gradient-sparse magnetic resonance images*. pages 799 – 806, Dec 2009.
- [15] SoHO Website. *Best of SoHO gallery*. <https://soho.nascom.nasa.gov/gallery/SolarCorona/las013.html>, 1996. data de acesso: 20/11/2019.
- [16] Richard Berry e James Burnell. *Handbook of astronomical Image Processing*. Willmann-Bell, 2nd edition, 2005.
- [17] Jean-Luc Starck Jérôme Bobin e Roland Ottensamer. *Compressed Sensing in Astronomy. IEEE Jornal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 2, 2008.
- [18] J. Romberg E. J. Candès e T. Tao. *Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information*. *IEEE transactions on information theory*, Vol. 52, 2006.
- [19] S. B. Dhok Meenu Rani e R. B. Deshmukh. *A Systematic Review of Compressive Sensing: Concepts, Implementations and Applications*. *IEEE Acess*, Vol. 6, 2018.
- [20] Jérôme Bobin e Jean-Luc Starck. *Astronomical Data Analysis and Sparsity: From Wavelets to Compressed Sensing*. *Proceedings of the IEEE*, Vol. 98, 2010.
- [21] Markus J. Aschwanden. *Solar Stereoscopy and Tomography*. *Living Reviews in Solar Physics*, 8(1):5, Oct 2011.
- [22] M. D. Butala, F. Kamalabadi, R. A. Frazin, e Y. Chen. *Dynamic Tomographic Imaging of the Solar Corona*. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2(5):755–766, Oct 2008.
- [23] NASA Science. *What Is the Sun’s Corona?* <https://spaceplace.nasa.gov/sun-corona/en/>, 2019. data de acesso: 17/12/2019.

- [24] NASA. *IRIS Mission Overview*. https://www.nasa.gov/mission_pages/iris/overview/index.html, 2017. data de acesso: 17/12/2019.
- [25] B. De Pontieu, S. W. McIntosh, M. Carlsson, V. H. Hansteen, T. D. Tarbell, P. Boerner, J. Martinez-Sykora, C. J. Schrijver, e A. M. Title. *The Origins of Hot Plasma in the Solar Corona*. *Science*, 331(6013):55–58, 2011.
- [26] Stefan Hughes. *Catchers of the light : the astrophotographers' family history : tales of adventure, adversity triumph*, volume 1. Paphos, Cyprus, 2012.
- [27] R. L. White, M. Postman, e M. G. Lattanzi. Compression of the Guide Star Digitised Schmidt Plates. In H. T. MacGillivray e E. B. Thomson, editors, *Digitised Optical Sky Surveys*, volume 174 of *Astrophysics and Space Science Library*, page 167, 1992.
- [28] David L. Donoho. *Compressed Sensing*. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52:1289 – 1305, 2006.
- [29] Emmanuel J. Candes e Terence Tao. *Near-Optimal Signal Recovery From Random Projections: Universal Encoding Strategies?*. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52:5406 – 5425, 2006.
- [30] Robert A. Schowengerdt. *Remote Sensing: Models and Methods for Image Processing*. Elsevier, 3rd edition, 2007.
- [31] H. C. van de Hulst. *The electron density of the solar corona*. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 11:135, Feb 1950.
- [32] B. Hunt. *Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications*. *SIAM Review*, 23(3):399–400, 1981.
- [33] Dr. Sten Oldenwald. *Magnetism*. <https://image.gsfc.nasa.gov/poetry/magnetism/magnetism.html>, 2013. data de acesso: 30/09/2019.
- [34] L. M. da Silva. *Solução de problemas unidimensionais por transformada integral generalizada utilizando a técnica de domínio envolvente*. PhD thesis, Pós graduação em engenharia mecânica Universidade Federal Fluminense, 2010. Tese de mestrado.
- [35] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, e S.H. Nawab. *Sinais e sistemas*. Prentice-Hall, 2010.
- [36] David H. Bailey e Paul N. Swarztrauber. *A Fast Method for the Numerical Evaluation of Continuous Fourier and Laplace Transforms*. *SIAM Review*, 15:1105–1110, 1994.
- [37] Hélio de Oliveira. *Análise de Fourier e Wavelets (Sinais Estacionários e não Estacionários)*. Jul 2007.

- [38] M. J. Soares. *Onduletas e Processamento de Sinal. Fundação João Jacinto Magalhães*, pages 395–400, 1997.
- [39] Emmanuel Candès e Justin Romberg. *Sparsity and Incoherence in Compressive Sampling. Inverse Problems*, 23:969–985, Apr 2007.
- [40] J. Radon. *On the determination of functions from their integral values along certain manifolds. IEEE Transactions on Medical Imaging*, 5(4):170–176, Dec 1986.
- [41] H. Neto e E. Salomão. *Algoritmos incrementais com aplicações em tomografia computadorizada*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, 2009. Tese de mestrado.
- [42] Roberto de Alencar Lotufo. *Reconstrução Tomográfica por Retroprojeção Filtrada*. <http://www.dca.fee.unicamp.br/~lotufo/cursos/ia-636-2000/labs/projects/grossi/index.html>, 2000. data de acesso: 21/11/2019.
- [43] David L Donoho. *Compressed Sensing. IEEE Transactions on Information Theory*, 52(4):1289–1306, 2006.
- [44] Emmanuel J Candès. *Compressive sampling. Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2006.
- [45] Alan V. Oppenheim e Alan S. Willsky. *Sinais e Sistemas*. Pearson, 2º edition, 1997.
- [46] Yonina C. Eldar. *Compressed sensing. Cambridge University Press*, pages 390–471, 2015.
- [47] David Donoho. *For Most Large Underdetermined Systems of Linear Equations the Minimal L1-norm Solution is also the Sparsest Solution*. <http://wwwstat.stanford.edu/~donoho/Reports/2004>, Sep 2004. data de acesso: 06/09/2019.
- [48] Emmanuel Candes, Justin Romberg, e Terence Tao. *Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information. IEEE Information Theory Society*, Vol. 52:p. 489–509, 2008.
- [49] Maurice D. Weir, Joel Hass, e George B. Thomas. *Cálculo*, volume 2. Pearson, 12th edition, 2012.
- [50] Claude Elwood Shannon. *A Mathematical Theory of Communication. The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, Aug 1948.
- [51] David Donoho. *For most large underdetermined systems of equations, the minimal l1-norm near-solution approximates the sparsest near-solution. Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59:907 – 934, Sep 2006.

- [52] Elon Lages Lima. *Espaços Métricos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2nd edition, 1977.
- [53] Olivaine S. de Queiroz. *Notas de Aula de Análise Funcional*. <https://www.ime.unicamp.br/~olivaine/Funcional.pdf>, 2013. data de acesso: 06/09/2019.
- [54] David L. Donoho Alfred M. Bruckstein e Michael Elad. *From Sparse Solutions of Systems of Equations to Sparse Modeling of Signals and Images*. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 51:34 – 81, 2009.
- [55] István Hargittai. *Christopher Hammond: The basics of crystallography and diffraction*. *Structural Chemistry*, 20(4):1–751, Aug 2009.
- [56] P. Suetens. *Fundamentals of Medical Imaging*. Cambridge medicine. Cambridge University Press, 2009.
- [57] Gabor T. Herman. *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections*. Springer Publishing Company, Incorporated, 2nd edition, 2009.
- [58] A. R. Pierro. *Problemas Matemáticos em Tomografia por Emissão*. Universidade Estadual de Campinas - Notas de aula, pages 1–18, 2003.
- [59] Simon Cherry, Magnus Dahlbom, e Michael Phelps. *PET: Physics, Instrumentation, and Scanners*. Jan 2006.
- [60] D.N. Baker. *What is space weather?* *Advances in Space Research*, 22(1):7–16, 1998. Solar-Terrestrial Relations: Predicting the Effects on the Near-Earth Environment.
- [61] A. Bruzek e C.J. Durrant. *Illustrated Glossary for Solar and Solar-Terrestrial Physics*, volume 69. Springer Netherlands, 1 edition, 1977.
- [62] Vieira, L. E. A., Solanki, S. K., Krivova, N. A., e Usoskin, I. *Evolution of the solar irradiance during the Holocene*. *A&A*, 531:A6, 2011.
- [63] Sami K. Solanki. *Small-scale solar magnetic fields: An overview*. *Space Science Reviews*, 63(1):1–188, Mar 1993.
- [64] K. T. Strong, J. L. R. Saba, B. M. Haisch, e J. T. Schmelz, editors. *The many faces of the sun : a summary of the results from NASA's Solar Maximum Mission*, 1999.
- [65] T. Kosugi e S. Tsuneta. *Time variations of hard X-ray bursts observed with the Solar X-ray Telescope aboard Hinotori*. *Springer*, 86(1-2):333–338, Jul 1983.

- [66] European Space Agency. *Extended Life for ESA's Science Missions*. <https://sci.esa.int/web/director-desk/-/60943-extended-life-for-esas-science-missions#1>, 2018. data de acesso: 03/10/2019.
- [67] *The Planetary Society. Missions to study the Sun*. <http://www.planetary.org/explore/space-topics/space-missions/missions-to-study-the-sun.html>, 2018. data de acesso: 03/10/2019.
- [68] W. T. Thompson. *Coordinate systems for solar image data*. *Springer Science*, 449(2):791–803, Apr 2006.
- [69] V. Domingo, B. Fleck, e A. I. Poland. *The SoHO Mission: an Overview*. *Springer*, 162(1-2):1–37, Dec 1995.
- [70] W. T. Thompson e K. Wei. *Use of the FITS World Coordinate System by STEREO/SECCHI*. *Solar Physics*, 261(1):215, Dec 2009.
- [71] L.E. Gumley. *Practical IDL Programming*. Elsevier Science, 2002.
- [72] Richard A. Frazin e Paul Janzen. *Tomography of the Solar Corona. II. Robust, Regularized, Positive Estimation of the Three-dimensional Electron Density Distribution from LASCO-C2 Polarized White-Light Images*. *The Astrophysical Journal*, 570(1):408–422, May 2002.
- [73] V. Delouille, P. Chainais, e J.-F. Hochedez. *Spatial and Temporal Noise in Solar EUV Observations*, pages 231–245. Springer New York, New York, NY, 2009.
- [74] Behzad Sharif e Farzad Kamalabadi. Optimal discretization resolution in algebraic image reconstruction. In Kevin H. Knuth, Ali E. Abbas, Robin D. Morris, e J. Patrick Castle, editors, *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, volume 803 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 199–206, Nov 2005.
- [75] Tom Bogdan e B. Low. *The three-dimensional structure of magnetostatic atmospheres. II Modeling the large-scale corona*. *The Astrophysical Journal*, 306:271–283, Jul 1986.
- [76] Daniel Potts e Gabriele Steidl. *Fourier Reconstruction of Functions from their Nonstandard Sampled Radon Transform*. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 8:513–534, Nov 2002.
- [77] John D. O'Sullivan. *A Fast Sinc Function Gridding Algorithm for Fourier Inversion in Computer Tomography*. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 4:200–207, 1985.

- [78] G. A. Wright. *Magnetic resonance imaging. IEEE Signal Processing Magazine*, 14(1):56–66, Jan 1997.
- [79] C. J. Miosso, R. von Borries, M. Argaez, L. Velazquez, C. Quintero, e C. M. Potes. *Compressive Sensing Reconstruction With Prior Information by Iteratively Reweighted Least-Squares. IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(6):2424–2431, Jun 2009.
- [80] R. Chartrand e Wotao Yin. *Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing. In 2008 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 3869–3872, Mar 2008.
- [81] R. von Borries, C. J. Miosso, e C. Potes. *Compressed Sensing Using Prior Information. In 2007 2nd IEEE International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*, pages 121–124, Dec 2007.
- [82] Zhou Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, e E. P. Simoncelli. *Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. IEEE Transactions on Image Processing*, 13(4):600–612, Apr 2004.